ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS VIII.

1936–1937

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIEN.

ACTA

LITTERARUM AC SCIENTIARUM

REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-IOSEPHINAE

SECTIO

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

REDIGUNT:

B. DE KERÉKJÁRTÓ — F. RIESZ.

TOMUS VIII.

1936—1937.

SZEGED.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM ÉS
A ROTHERMERE-ALAP TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA:
AZ EGYETEM BARÁTAINAK EGYESÜLETE.

Pag.

SKOLEM, TH., Bergen. Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierter Relationen auf „arithmetische". . . 73— 88
TURÁN, P., und GRÜNWALD, G., Budapest. Über den Blochschen Satz. . . . . 236—240
TURÁN, P., Budapest. Über die Primzahlen der arithmetischen Progression. 226—235
WAVRE, R., Genève. Sur le potentiel newtonien et la théorie des fonctions analytiques. 185—190

BIBLIOGRAPHIE.

The Journal of Symbolic Logic. — SZÁSZ PÁL, A differenciál- és integrálszámítás elemei I–II [PAUL V. SZÁSZ, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung I—II]. — GEORG SCHRFFERE, Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten? — T. BONNESEN und W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper. — HEINRICH LIEBMANN, Synthetische Geometrie. — R. POZDÈNA, Meter und Kilogramm. — WERNER HEINZE, Kristallprojektion. — B. L. VAN DER WAERDEN, Gruppen von linearen Transformationen. . . . . 68— 72
V. BJERKNES, C. A. Bjerknes, sein Leben und seine Arbeit. — RICHARD PETERSEN, Om en Klasse naestenperiodiske analytiske Funktioner. — C. JUEL, Vorlesungen über projektive Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der v. Staudtschen Imaginärtheorie. — WEBER—WELLSTEIN, Enzyklopädie der Elementarmathematik I, V. Aufl. — W. LIETZMANN, Altes und neues vom Kreis. — FR. SCHILLING, Die Pseudosphäre und nichteuklidische Geometrie I - II. — RUDOLF ROTHE, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure III. — STEFAN KACZMARZ und HUGO STEINHAUS, Theorie der Orthogonalreihen. — DAVID HILBERT, Gesammelte Abhandlungen III. . . . . . 177—184
RAYMOND E. A. C. PALEY † and NORBERT WIENER, Fourier Transforms in the Complex Domain. — WILLARD VAN ORMAN QUINE, A System of Logistic. — MAX DEURING, Algebren. — ANTONI ZYGMUND, Trigonometrical Series. . . . . 256—260

Sur une fonction non mesurable, partout presque symétrique.

Par WACŁAW SIERPIŃSKI à Varsovie.

Nous dirons que la fonction $f(x)$ d'une variable réelle est *presque symétrique* au point a, si l'on a

$$f(a+x)=f(a-x)$$

pour tous les x réels, sauf peut-être pour un ensemble de nombres x de puissance $<2^{\aleph_0}$.

Le but de cette Note est de démontrer (à l'aide du „Wohlordungssatz" de M. ZERMELO) ce

Théorème: *Il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle non mesurable et partout presque symétrique.*[1])

Je démontrerai ce théorème en modifiant la démonstration de mon théorème de la p. 27 du t. 19 des *Fundamenta Mathematicae,* dans laquelle j'ai appliqué une méthode due à M. BANACH[2]).

Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance du continu et soit

$$(1)\qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi)$$

une suite transfinie du type φ formée de tous les nombres réels.

La famille de tous les ensembles linéaires parfaits étant de puissance du continu, il existe une suite transfinie du type φ,

$$(2)\qquad P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\omega, P_{\omega+1}, \ldots, P_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi)$$

formée de tous les ensembles linéaires parfaits.

---

[1]) Cf. le problème de M. HAUSDORFF, *Fundamenta Math.,* 25 (1935), p. 578 (Problème 62).

[2]) St. BANACH, Sur les transformations biunivoques, *Fundamenta Math.,* 19 (1932), p. 10—16, esp. p. 13.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie deux suites du type φ, $\{p_\alpha\}$ et $\{q_\alpha\}$ comme il suit.

Soit p_1 le premier terme de la suite (1) qui appartient à P_1 et soit q_1 le premier terme de la suite (1) qui appartient à P_1 et tel que $q_1 \neq p_1$.

Soit maintenant α un nombre ordinal donné >1 et $<\varphi$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres p_ξ et q_ξ, où $\xi<\alpha$.

Désignons par S_α l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$2x_{\xi_1}-2x_{\xi_2}+2x_{\xi_3}-\ldots+(-1)^{n-1}2x_{\xi_n}+(-1)^n q_\xi,$$

où $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $<\alpha$. L'ensemble S_α est évidemment de puissance $\leqq \overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2+\overline{\alpha}^3+\ldots$, donc, d'après $\alpha<\varphi$ (ce qui donne $\overline{\alpha}<2^{\aleph_0}$) de puissance $<2^{\aleph_0}$. L'ensemble P_α, en tant que parfait, étant de puissance $2^{\aleph_0}$, l'ensemble $P_\alpha - S_\alpha$ est donc non vide. Nous définirons p_α comme le premier terme de la suite (1) qui appartient à $P_\alpha - S_\alpha$.

Or, désignons par T_α l'ensemble de tous les nombres de la torme

$$2x_{\xi_1}-2x_{\xi_2}+2x_{\xi_3}-\ldots+(-1)^{n-1}2x_{\xi_n}+(-1)^n p_\xi,$$

où $\xi \leqq \alpha$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $<\alpha$. D'après $\alpha<\varphi$ on voit sans peine que $\overline{\overline{T}}_\alpha<2^{\aleph_0}$, d'où il résulte que $P_\alpha - T_\alpha \neq 0$. Nous définirons q_α comme le premier terme de la suite (1) qui appartient à $P_\alpha - T_\alpha$.

Les suites transfinies $\{p_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$ et $\{q_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$ sont ainsi définies par l'induction transfinie.

Désignons maintenant par N l'ensemble de tous les nombres

$$2x_{\xi_1}-2x_{\xi_2}+2x_{\xi_3}-\ldots+(-1)^{n-1}2x_{\xi_n}+(-1)^n p_\alpha,$$

où α est un nombre ordinal $<\varphi$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $<\alpha$.

Désignons par Q l'ensemble de tous les points q_α où $\alpha<\varphi$. Je dis que

$$NQ=0. \tag{3}$$

En effet, supposons que $p \in NQ$. Il résulte de $p \in N$ et de la définition de l'ensemble N qu'il existe un nombre ordinal $\alpha<\varphi$ et une suite finie de nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, tous $< \alpha$, tels que

(4) $\quad p = 2x_{\xi_1} - 2x_{\xi_2} + 2x_{\xi_3} - \ldots + (-1)^{n-1} 2x_{\xi_n} + (-1)^n p_\alpha.$

Or, de $p \in Q$ et de la définition de l'ensemble Q il s'ensuit qu'il existe un nombre ordinal $\beta < \varphi$, tel que

(5) $$p = q_\beta.$$

Il résulte de la définition du nombre q_β que q_β non $\in T_\beta$. Or, si $\alpha \leqq \beta$ on a, d'après la définition de l'ensemble T_β et d'aprés (4): $p \in T_\beta$. Donc, si $\alpha \leqq \beta$, on a $p \neq q_\beta$, contrairement à (5).

Or, d'après la définition de p_α on a p_α non $\in S_\alpha$, et, si $\alpha > \beta$, on a, d'après la définition de l'ensemble S_α (les nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ étant $< \alpha$):

$$2x_{\xi_n} - 2x_{\xi_{n-1}} + 2x_{\xi_{n-2}} - \ldots + (-1)^{n-1} 2x_{\xi_1} + (-1)^n q_\beta \in S_\alpha.$$

Donc, si $\alpha > \beta$, on a

$$p_\alpha \neq 2x_{\xi_n} - 2x_{\xi_{n-1}} + 2x_{\xi_{n-2}} - \ldots + (-1)^{n-1} 2x_{\xi_1} + (-1)^n q_\beta,$$

contrairement à (4) et (5).

L'hypothèse que $p \in NQ$ implique donc toujours une contradiction. On a donc la formule (3).

On a $2x_1 - 2x_1 + (-1)^2 p_\alpha = p_\alpha$: il résulte donc de la définition de l'ensemble N que $p_\alpha \in N$ pour $\alpha < \varphi$. D'après $p_\alpha \in P_\alpha$ et $q_\alpha \in P_\alpha$ pour $\alpha < \varphi$, on a donc $P_\alpha N \neq 0$ et $P_\alpha Q \neq 0$ pour $\alpha < \varphi$. Chacun des ensembles N et Q a donc au moins un point commun avec tout ensemble (linéaire) parfait. Les ensembles N et Q étant, d'après (3), disjoints, il en résulte qu'ils sont de puissance du continu, non mesurables L et de deuxième catégorie dans tout intervalle.

Soit maintenant a un nombre réel donné quelconque. D'après la propriété de la suite (1) on a donc $a = x_\lambda$, où λ est un nombre ordinal $< \varphi$.

Désignons par $N^*(a)$ l'ensemble symétrique de l'ensemble N par rapport au point a comme centre de symétrie. $N^*(a)$ est donc l'ensemble de tous les nombres $2a - x$, où $x \in N$.

Soit p un point de l'ensemble $N^*(a) - N$. D'après $p \in N^*(a)$ et d'après la définition de l'ensemble N, on a (vu que $a = x_\lambda$):

(6) $\quad p = 2x_\lambda - 2x_{\xi_1} + 2x_{\xi_2} - \ldots + (-1)^n 2x_{\xi_n} + (-1)^{n+1} p_\alpha,$

où α est un nombre ordinal $< \varphi$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $< \alpha$.

S'il est $\lambda < \alpha$, le point (6) appartient évidemment à l'ensemble N (d'après la définition de N). D'après $p \in N^*(a) - N$ on a donc $\lambda \geqq \alpha$.

Donc, si $p \in N^*(a) - N$, p est de la forme (6), où α est un nombre ordinal $\leqq \lambda$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $< \alpha$.

L'ensemble de tous tels nombres p est (pour tout λ donné $< \varphi$) évidemment de puissance $\leqq \aleph_0 + \overline{\overline{\lambda}}$, donc, d'après $\lambda < \varphi$, de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

L'ensemble $R = N^*(a) - N$ est donc de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Or, on a évidemment $N - N^*(a) = R^*(a)$: cet ensemble est donc aussi de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

Les ensembles N et $N^*(a)$ ne diffèrent donc que par un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Nous avons ainsi démontré la proposition suivante:

Il existe un ensemble linéaire N non mesurable L qui est symétrique par rapport à tout point a comme centre de symétrie, quand on néglige un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ (dépendant de a).

La fonction caractéristique de l'ensemble N satisfait évidemment aux conditions de notre théorème[3]) qui est ainsi démontré.

Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est au point a *approximativement symétrique au sens large,* resp. *au sens restreint,* si le point a est un point de densité extérieure 1[4]), resp. intérieure 1 de l'ensemble de tous les nombres x réels, pour lesquels $f(a+x) = f(a-x)$.

Nous dirons que la fonction $f(x)$ a au point a la *dérivée symétrique approximative au sens large,* resp. *au sens restreint* égale à A, si, pour tout $\varepsilon > 0$, le point a est un point de densité extérieure 1, resp. intérieure 1 de l'ensemble de tous les nombres réels $h \neq 0$, pour lesquels

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - A \right| < \varepsilon.$$

Vu que tout ensemble linéaire de puissance $< 2^{\aleph_0}$ est de mesure

---

[3]) Cette fonction est, d'ailleurs, parfaitement discontinue (c'est-à-dire discontinue sur tout ensemble parfait).

[4]) Pour la définition de cette notion voir p. e. mes notes: Sur une généralisation de la notion de la continuité approximative, *Fundamenta Math.*, 4 (1923), p. 124—127 et Démonstration élémentaire du théorème sur la densité des ensembles, *ibidem,* p. 167—171.

intérieure nulle, il résulte tout de suite de notre théorème les deux corollaires suivants:

Corollaire 1: *Il existe une fonction non mesurable $f(x)$ qui est partout approximativement symétrique au sens large.*

Corollaire 2: *Il existe une fonction non mesurable $f(x)$ qui a partout la dérivée symétrique approximative au sens large égale à* 0.

M. S. Ruziewicz m'a communiqué récemment une démonstration directe et fort simple de ces deux corollaires qui utilise la *base hamelienne.*

Soit B une *base* de M. Hamel[5]). Soit $b \neq 0$ un élément donné de B et désignons par Q l'ensemble de tous les nombres réels dans les développements desquels (à l'aide des éléments de la base B) ne figure pas l'élément b. On voit sans peine que si r et r' sont deux nombres rationnels distincts, et si l'on désigne par $Q(a)$ la translation de Q de longueur a, on a toujours $Q(br)\,Q(br')=0$. Les ensembles $Q\left(\frac{b}{n}\right)(n=1, 2, 3, \dots)$ sont donc deux à deux disjoints.

Or, comme on voit sans peine, pour prouver qu'un ensemble linéaire E (borné ou non) est de mesure intérieure nulle, il suffit de démontrer qu'il existe une suite infinie *bornée* de nombres réels $u_1, u_2, u_3, \dots$ telle que les ensembles $E(u_1), E(u_2), E(u_3), \dots$ sont deux à deux disjoints. L'ensemble Q est donc de mesure intérieure nulle. Or, il ne peut pas être de mesure nulle, puisque la somme $\sum_r Q(br)$ étendue à tous les nombres rationnels r est évidemment l'ensemble de tous les nombres réels. L'ensemble Q est donc non mesurable.[6]) Soit $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble Q: c'est donc une fonction non mesurable. Je dis qu'elle satisfait aux condition du Corollaire 1 (donc aussi du Corollaire 2).

En effet, soit a un nombre réel donné quelconque. Soit r_0 le coefficient (rationnel) de b dans le développement du nombre a (à l'aide des éléments de la base B). Comme plus haut pour Q,

---

[5]) Voir G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Annalen,* **60** (1905), p. 459—462; cf. ma note Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel, *Fundamenta Math.*, 1 (1920), p. 105—111.

[6]) Cf. ma note citée [5]), p. 108.

nous démontrons sans peine que l'ensemble $R = Q(r_0 b) + Q(-r_0 b)$ est de mesure intérieure nulle.

Soit maintenant x un nombre réel n'appartenant pas à R, et soit r le coefficient (rationnel) de b dans le développement du nombre x. On a donc $r \neq r_0$ et $r \neq -r_0$, donc $r_0 + r \neq 0$ et $r_0 - r \neq 0$. Or, $r_0 + r$, resp. $r_0 - r$, est le coefficient de b dans le développement du nombre $a + x$, resp. $a - x$. On a donc (d'après la définition de Q) $a + x$ non $\in Q$ et $a - x$ non $\in Q$, ce qui donne $f(a+x) = 0$ et $f(a-x) = 0$, donc $f(a+x) = f(a-x)$.

On a donc

$$f(a+x) = f(a-x) \quad \text{pour} \quad x \in CR;$$

l'ensemble R étant de mesure intérieure nulle, la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions du Corollaire 1, c. q. f. d.

Il résulte tout de suite de notre théorème encore ces deux corollaires:

Corollaire 3: *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une fonction non mesurable $f(x)$ qui est partout symétrique quand on néglige des ensembles dénombrables* (c'est-à-dire pour tout a réel l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $f(a+x) \neq f(a-x)$ est au plus dénombrable).

Corollaire 4: *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une fonction non mesurable $f(x)$ qui a partout la dérivée symétrique approximative au sens restreint égale à* 0.

Quant à cette dernière proposition, il est à remarquer qu'une proposition analogue n'a pas lieu pour la dérivée approximative (au sens restreint) ordinaire, puisqu'elle contredirait à un théorème de Stepanoff—Kamke[7]). Or, on ne peut pas supprimer dans l'énoncé du Corollaire 4 les mots „approximative au sens restreint", puisque, d'après un théorème de M. Charzyński, l'ensemble de points de discontinuité d'une fonction $f(x)$ dont la dérivée symétrique est partout nulle est clairsemé.[8])

(Reçu le 25 novembre 1935)

---

[7]) Voir: E. Kamke, Zur Definition der approximativ stetigen Funktionen, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), p. 431—433 (esp. Satz 1) et W. Stepanoff, Sur une propriété caractéristique des fonctions mesurables, *Recueil Math. Moscou*, 31 (1924), p. 497—489.

[8]) Z. Charzyński, Sur les fonctions dont la dérivée symétrique est partout fini, *Fundamenta Math.*, 21 (1933), p. 214—225.

Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems.

Von JÓZEF PEPIS in Lwów (Polen).

Einleitung.

Vorliegende Arbeit schließt sich den Untersuchungen über das Entscheidungsproblem des engeren logischen Funktionenkalküls[1]) (Prädikatenkalküls) an. Auf Grund einer verschärften methodischen Anforderung[2]) ist man bekanntlich in den letzten Jahren zu einer Unterscheidung des mengentheoretischen Prädikatenkalküls vom sogenannten beweistheoretischen (axiomatischen) Prädikatenkalkül[3]) gelangt. Der Unterschied macht sich dadurch geltend, daß solche Begriffe wie „Individuenbereich", „erfüllbar", „allgemeingültig", die im mengentheoretischen Prädikatenkalkül eine große Rolle spielen, im beweistheoretischen Kalkül im allgemeinen nicht zugelassen werden; sie werden nämlich dort durch ihnen entsprechende finite Begriffe ersetzt. So werden z. B. die Begriffe „allgemeingültig", „erfüllbar" durch die finiten Begriffe „ableitbar", „unwiderlegbar" vertreten. Dieser Unterscheidung zwischen „mengentheoretischem Kalkül" und „beweistheoretischem Kalkül" entspricht selbstverständlich auch eine Unterscheidung zwischen „mengentheoretischem Entscheidungsproblem" und „beweistheoretischem Entscheidungsproblem".

---

[1]) Vgl. D. HILBERT—W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, 1928), insb. drittes Kapitel.

[2]) Bei dieser Anforderung handelt es sich hauptsächlich um eine neue (finite) Auseinandersetzung mit dem Problem des Unendlichen.

[3]) Bez. dieser Unterscheidung vgl. das Werk: D. HILBERT—P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, I (Berlin, 1934).

Vorliegende Arbeit ist dem mengentheoretischen Entscheidungsproblem gewidmet und zwar jener Richtung der Untersuchungen über das mengentheoretische Entscheidungsproblem, welche mit dem Namen „Reduktionstheorie" bezeichnet wird. D. h. es werden hier einige Reduktionssätze aufgestellt und bewiesen, die die Lösung des mengentheoretischen Entscheidungsproblems auf die Lösung gewisser Spezialfälle desselben zurückführen.

Betreffs dieser Richtung von Untersuchungen liegt schon in der Literatur eine Reihe von interessanten Ergebnissen vor, an denen hauptsächlich folgende Autoren beteiligt sind[4]): K. GÖDEL, J. HERBRAND, L. KALMÁR, L. LÖWENHEIM und TH. SKOLEM.

In I beweise ich einige allgemeinere Sätze über Abbildungen unendlicher Individuenbereiche und Sätze über in diesen Individuenbereichen geltende Darstellungen beliebiger logischer Funktionen. Diese Sätze finden dann in II, bei der Ableitung der eigentlichen Reduktionssätze, Anwendung.

Obzwar die Beweise der hier aufgestellten Reduktionssätzen eng mit dem Begriff „unendlicher Individuenbereich" verbunden sind, lassen sich doch fast alle diese Reduktionssätze unschwer in den beweistheoretischen Kalkül übertragen. Dies sei aber einer weiteren Arbeit vorbehalten.

I. Darstellungen von Funktionen in unendlichen Individuenbereichen.

Ist $\Phi(x, y, z)$ eine dreistellige logische Funktion in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$, so stellt für $n \geqq 2$

$$(1) \qquad (Ev_2)(Ev_3)\ldots(Ev_{n-1})\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \text{[5])}$$

eine $n+1$-stellige Funktion mit den Argumenten $v_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n$ dar. Es gilt der folgende

Satz 1. *Ist $\Phi(x, y, z)$ eine Funktion, die eineindeutig die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ auf die Paare von Elementen $[y, z]$ aus $\mathfrak{J}$ abbildet*[6]), *so bildet die Funktion*

---

[4]) Die entsprechenden Arbeiten werden im Text näher angeführt.

[5]) Das Summenzeichen soll hier und im folgenden die Konjunktion andeuten.

[6]) Eine solche Funktion existiert dann und nur dann, wenn die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{J}$ der Gleichung $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ genügt.

$$(Ev_2)(Ev_3)\ldots(Ev_{n-1})\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

die Elemente v_1 *aus* $\mathfrak{J}$ *auf die n-tupel* $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$ *von Elementen aus* $\mathfrak{J}$ *eineindeutig ab.*

Damit die durch (1) dargestellte Funktion zu einer eineindeutigen Abbildung des Individuenbereichs $\mathfrak{J}$ auf den Bereich aller n-tupel von Elementen aus $\mathfrak{J}$ gehöre, ist notwendig und hinreichend, daß die folgenden vier Bedingungen erfüllt seien:

a) Zu jedem Ding v_1 aus $\mathfrak{J}$ gibt es ein Bildtupel $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$:

$$(v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^n\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right].\text{[7]} \tag{2}$$

b) Zu jedem n-tupel $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ gibt es bei der Umkehrung der Abbildung ein Bildelement v_1:

$$(x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\sigma)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]. \tag{3}$$

c) Die Abbildung ist eindeutig:

$$\begin{aligned}&(v_1)(\overset{*}{v}_1)(x_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{x}_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(\overset{*}{v}_n)\Bigg\{\Bigg[(v_1=\overset{*}{v}_1)\,\& \\ &\&(Ev_\sigma)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\,\&(E\overset{*}{v}_\sigma)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i)\Bigg]\to \\ &\to\left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_i=\overset{*}{x}_i)\,\&\,(v_n=\overset{*}{v}_n)\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4}$$

d) Die Umkehrung der Abbildung ist eindeutig:

$$\begin{aligned}&(x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(\overset{*}{x}_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_n)(v_1)(\overset{*}{v}_1)\Bigg\{\Bigg[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i=\overset{*}{x}_i)\,\&\,(v_n=\overset{*}{v}_n)\,\& \\ &\&(Ev_\varrho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\,\&(E\overset{*}{v}_\varrho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i)\Bigg]\to \\ &\to(v_1=\overset{*}{v}_1)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Bildet die Funktion $\Phi(x, y, z)$ die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ auf die

---

[7]) Wir verwenden hier und im folgenden häufig $(x_\varrho)_a^b$ bzw. $(Ex_\varrho)_a^b$ (für $b \geqq a$) als abkürzende Bezeichnung für $(x_a)(x_{a+1})\ldots(x_b)$ bzw. $(Ex_a)(Ex_{a+1})\ldots(Ex_b)$. Das Symbol ϱ, das den variablen Index angibt, darf natürlich durch jedes andere Symbol (z. B. durch σ, ν, μ, ι) ersetzt werden.

Paare $[y, z]$ aus $\mathfrak{J}$ eineindeutig ab, so sind die folgenden vier Bedingungen erfüllt:

a)* Zu jedem Ding x aus $\mathfrak{J}$ gibt es ein Bildpaar $[y, z]$:

(6) $$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z).$$

b)* Zu jedem Paar von Elementen $[y, z]$ aus $\mathfrak{J}$ gibt es bei der Umkehrung der Abbildung ein Bildelement x:

(7) $$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x, y, z).$$

c)* Die Abbildung ist eindeutig:

(8) $$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})\,[\Phi(x, y, z) \,\&\, \Phi(x, \overset{*}{y}, \overset{*}{z}) \rightarrow (y = \overset{*}{y}) \,\&\, (z = \overset{*}{z})].$$

d)* Die Umkehrung der Abbildung ist eindeutig:

(9) $$(x)(\overset{*}{x})(y)(z)\,[\Phi(x, y, z) \,\&\, \Phi(\overset{*}{x}, y, z) \rightarrow (x = \overset{*}{x})].$$

Zum Beweis des Satzes 1 genügt es offenbar zu zeigen, daß die vier Implikationen: $(6) \rightarrow (2)$, $(7) \rightarrow (3)$, $(8) \rightarrow (4)$, $(9) \rightarrow (5)$ allgemeingültige logische Formeln darstellen, oder, was dasselbe bedeutet, daß *a)* aus *a*)*, *b)* aus *b*)*, *c)* aus *c*)* und *d)* aus *d*)* folgt.

Hier beweisen wir die Allgemeingültigkeit der beiden ersten[8]:

Satz 2. *Für jedes* $n \geqq 2$ *ist*

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

allgemeingültig.

Der Beweis wird durch Induktion nach n geführt:

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (v_1)(Ex_1)(Ev_2)\,\Phi(v_1, v_2, x_1)$$

ist allgemeingültig, denn Vorderglied und Hinterglied unterscheiden sich nur in der Bezeichnung der Variablen und in der Reihenfolge benachbarter Seinszeichen. Für $n = 2$ ist also Satz 2 richtig. Angenommen, er sei für n richtig, d. h. es sei

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

allgemeingültig; wir zeigen dann dasselbe für $n+1$.

Spaltet man in der letzten Formel $(Ev_\sigma)_2^n$ in $(Ev_\sigma)_2^{n-1}(Ev_n)$ auf, so erhält man

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^{n-1}(Ev_n)\left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right].$$

---

[8]) Der Beweis der Allgemeingültigkeit der beiden anderen Implikationen möge dem Leser überlassen bleiben.

Hieraus und aus der offenbar richtigen Formel

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (v_n)(Ev_{n+1})(Ex_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow \\ \rightarrow (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^{n-1}(Ev_n)\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \& \\ \& (v_n)(Ev_{n+1})(Ex_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n).\end{aligned} \tag{10}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}(v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^{n-1}(Ev_n)\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \& \\ \& (v_n)(Ev_{n+1})(Ex_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}(v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^{n-1}\Big\{(Ev_n)\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \& \\ \& (v_n)(Ev_{n+1})(Ex_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)\Big\}\end{aligned}$$

umformbar und hieraus, gemäß der Regel

$$(Ex)\,F(x) \,\&\, (x)\,G(x) \rightarrow (Ex)\,(F(x) \,\&\, G(x)),$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}(v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^{n-1}(Ev_n)\Big\{\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \& \\ \& (Ev_{n+1})(Ex_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)\Big\}\end{aligned}$$

und diese Formel läßt sich, wie man es sofort einsieht, in

$$(v_1)(Ex_\varrho)_1^{n}(Ev_\sigma)_2^{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

umformen.

Das Hinterglied der Implikation (10) impliziert also die letzte Formel. Daraus und aus Implikation (10) ergibt sich durch Kettenschluß die Formel

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n}(Ev_\sigma)_2^{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right],$$

womit Satz 2 bewiesen ist.

Satz 3. *Für jedes $n \geqq 2$ ist*

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\sigma)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

allgemeingültig.

Der Beweis wird durch Induktion nach n geführt.

Für $n=2$ ist der Satz richtig; denn

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\rightarrow(x_1)(v_2)(Ev_1)\,\Phi(v_1,v_2,x_1)$$

ist offenbar allgemeingültig. Der Satz sei für n als richtig angenommen; er soll für $n+1$ bewiesen werden.

Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\rightarrow(x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\sigma)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right]$$

allgemeingültig; da aber

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\rightarrow(v_{n+1})(x_n)(Ev_n)\,\Phi(v_n,v_{n+1},x_n)$$

offenbar allgemeingültig ist, so ist es auch die Formel

$$\begin{aligned}&(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\rightarrow\\ (11)\qquad&\rightarrow(x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\sigma)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right]\&\\ &\qquad\&(v_{n+1})(x_n)(Ev_n)\,\Phi(v_n,v_{n+1},x_n).\end{aligned}$$

Das Hinterglied dieser Formel läßt sich, wie man sofort einsieht, in

$$(x_\varrho)_1^n(v_{n+1})\left\}(v_n)(Ev_\sigma)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right]\&(Ev_n)\,\Phi(v_n,v_{n+1},x_n)\right\{$$

umformen und die letzte Formel impliziert gemäß der Schlußregel $(x)F(x)\&(Ex)G(x)\rightarrow(Ex)(F(x)\&G(x))$ die Formel

$$(x_\varrho)_1^n(v_{n+1})(Ev_\sigma)_1^n\left[\sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right].$$

Das Hinterglied der Implikation (11) impliziert also die letzte Formel, woraus mit Rücksicht auf (11) durch Kettenschluß die Formel

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\rightarrow(x_\varrho)_1^n(v_{n+1})(Ev_\sigma)_1^n\left[\sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right]$$

gewonnen werden kann. Damit ist unser Induktionsbeweis vollendet.

Wir beweisen jetzt den

Satz 4. *Notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer dreistelligen logischen Funktion $\Phi(x,y,z)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ in der Form: $R_1(x,y)\&R_2(x,z)$ ist die Richtigkeit der Formel:*

$$(12)\qquad(x)(y)(z)(u)(v)\,[\Phi(x,y,u)\&\Phi(x,v,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)]$$

in $\mathfrak{J}$.

Die Bedingung ist notwendig, da ja die Formel

$$(x)(y)(z)(u)(v)[R_1(x,y) \mathbin{\&} R_2(x,u) \mathbin{\&} R_1(x,v) \mathbin{\&} R_2(x,z) \rightarrow \\ \rightarrow R_1(x,y) \mathbin{\&} R_2(x,z)]$$

offenbar richtig ist. Sie ist aber auch hinreichend, denn, durch zweimalige Anwendung der Regel $(x)[F(x) \rightarrow p] \rightarrow [(Ex)F(x) \rightarrow p]$ (p enthält die Variable x nicht), ergibt sich aus ihr:

$$(x)(y)(z)[(Eu)\Phi(x,y,u) \mathbin{\&} (Ev)\Phi(x,v,z) \rightarrow \Phi(x,y,z)],$$

während die Umkehrung

$$(x)(y)(z)[\Phi(x,y,z) \rightarrow (Eu)\Phi(x,y,u) \mathbin{\&} (Ev)\Phi(x,v,z)]$$

stets richtig ist.

Setzt man nun

$$R_1(x,y) \equiv (Eu)\Phi(x,y,u), \quad R_2(x,z) \equiv (Ev)\Phi(x,v,z),$$

so besteht $(x)(y)(z)[\Phi(x,y,z) \sim R_1(x,y) \mathbin{\&} R_2(x,z)]$, also

$$\Phi(x,y,z) \equiv R_1(x,y) \mathbin{\&} R_2(x,z).$$

Aus Satz 4 ergibt sich z. B. der Beweis für die Darstellbarkeit jeder Relation $\Phi(x,y,z)$, die eineindeutig die Elemente x eines Individuenbereiches auf die Elementepaare $[y,z]$ desselben abbildet, in der Form $R_1(x,y) \mathbin{\&} R_2(x,z)$.[9] In der Tat, falls $[y,u]$ und $[v,z]$ zugleich Bildpaare von x sind, so muß wegen der Eindeutigkeit der Abbildung $y=v$ und $u=z$ sein, womit $[y,z]$ sich als Bildpaar von x erweist und somit die obige Bedingung (12) erfüllt ist.[10]

---

[9]) Diese Darstellbarkeit liegt zwar sprachlich nahe, indem man ja statt zu sagen: „$[y,z]$ ist das Bildpaar von x", auch: „y ist die erste Stelle des Bildpaares von x *und* z ist die zweite Stelle des Bildpaares von x" sagen kann; indessen ist auch ein exakter Beweis, wie der oben angegebene, notwendig.

[10]) Satz 4 läßt folgende Verallgemeinerung zu: *Notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer $n+1$ stelligen Funktion $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ in der Form $R_1(x,x_1) \mathbin{\&} R_2(x,x_2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} R_n(x,x_n)$ ist die Richtigkeit der Formel*

$$(x)(\overset{1}{x}_\varrho)_1^n(\overset{2}{x}_\varrho)_1^n\ldots(\overset{n}{x}_\varrho)_1^n[R(x,\overset{1}{x}_1,\overset{1}{x}_2,\ldots,\overset{1}{x}_n) \mathbin{\&} R(x,\overset{2}{x}_1,\overset{2}{x}_2,\ldots,\overset{2}{x}_n) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} R(x,\overset{n}{x}_1,\overset{n}{x}_2,\ldots,\overset{n}{x}_n) \rightarrow R(x,\overset{1}{x}_1,\overset{2}{x}_2,\ldots,\overset{n}{x}_n)].$$

Daraus folgt der exakte Beweis für den sprachlich naheliegenden Satz, daß jede Funktion $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, die eineindeutig die Elemente x eines Individuenbereichs $\mathfrak{J}$ auf die n-tupel $[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ abbildet, sich in der Form $R_1(x,x_1) \mathbin{\&} R_2(x,x_2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} R_n(x,x_n)$ darstellen läßt.

Satz 5. *Bildet die Funktion* $R_1(x,y) \& R_2(x,z)$ *eineindeutig die Elemente x aus* $\mathfrak{J}$ *auf die Paare* $[y,z]$ *von Elementen aus* $\mathfrak{J}$ *ab, so bildet die Funktion* $(Ev_\varrho)_2^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i, v_{i+1}) \& R_2(v_i, x_i))\right]$ *die Elemente* v_1 *aus* $\mathfrak{J}$ *eineindeutig auf die n-tupel* $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$ *von Elementen aus* $\mathfrak{J}$ *ab.*

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus Satz 1, indem wir $R_1(x,y) \& R_2(x,z)$ für $\Phi(x,y,z)$ einsetzen.

Satz 6. *Ist* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *eine in einem Individuenbereich* $\mathfrak{J}$ *definierte logische Funktion, für welche folgende beide Bedingungen:*

a) $$(x)(x_\varrho)_1^n(y_\sigma)_1^n\left[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\& R(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\rightarrow\sum_{i=1}^{n}(y_i=x_i)\right],$$

b) $$(x_\varrho)_1^n(Ex)R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

erfüllt sind[11]*), so läßt sich jede — in* $\mathfrak{J}$ *definierte — n-stellige Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *mit geeigneter Funktion* $f(x)$[12]*), in der Form* $(Ex)[f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ *darstellen.*

Beweis: Wird die Funktion $f(x)$ durch die Festsetzung $f(x) \equiv (Ey_\varrho)_1^n[F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ definiert, so gilt zunächst stets

$$\{f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \sim$$
$$\sim \{(Ey_\varrho)_1^n[F(y_1,y_2,\ldots,y_n)\& R(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)]\& R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\},$$

ferner wegen *a)*, wie man leicht einsieht, stets

$$\{(Ey_\varrho)_1^n[F(y_1,y_2,\ldots,y_n)\& R(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)]\& R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\}\sim$$
$$\sim\{F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\& R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\}.$$

Die beiden erhaltenen Äquivalenzen liefern zusammen die Äquivalenz $\{f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \sim \{F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, aus welcher leicht

$$(Ex)\{f(x)\& R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\}\sim$$
$$\sim\{F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\&(Ex)R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$$

gewonnen werden kann. Da aber, gemäß *b)*, $(Ex)R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

[11]) Die Bedingungen *a), b)* sind — wie man leicht einsieht — für $n \geqq 2$ dann und nur dann in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ erfüllbar, falls die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{J}$ der Gleichung $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, oder, was auf dasselbe auskommt, der Gleichung $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$ genügt.

[12]) Einstellige logische Funktionen bzw. Funktionsvariablen werden wir meistens durch kleine Buchstaben bezeichnen.

wahr ist, so folgt aus der letzten Äquivalenz sofort

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ex)\{f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\},$$

womit Satz 6 bewiesen ist.

Satz 7. *Ist* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *eine in einem Individuenbereich* $\mathfrak{J}$ *definierte logische Funktion, für welche die Bedingungen a), b) (aus Satz 6) erfüllt sind, so läßt sich jede — in* $\mathfrak{J}$ *definierte — n-stellige Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *mit geeigneter Funktion* $f(x)$, *in der Form* $(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ *darstellen.*

Beweis: Ist $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine beliebig in $\mathfrak{J}$ definierte Funktion, so läßt sich $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wegen Satz 6 in der Form $(Ex)[g(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ darstellen. Aus $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim$ $\sim (Ex)[g(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ folgt aber $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim$ $\sim (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \overline{g}(x)]$. $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ läßt sich also in der Form $(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ darstellen (mit $f(x) \equiv \overline{g}(x)$), w. z. b. w.

Ist insbesondere $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion, die eineindeutig die Elemente x eines Individuenbereichs $\mathfrak{J}$ auf die n-tupel $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ von solchen abbildet, so sind die Bedingungen *a), b)* offenbar erfüllt und daher ergeben sich aus den Sätzen 6 und 7 folgende zwei Behauptungen:

Satz 8. *Ist* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *eine Funktion, welche eineindeutig die Elemente x eines Individuenbereiches* $\mathfrak{J}$ *auf die n-tupel* $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *von solchen abbildet, so läßt sich jede, in* $\mathfrak{J}$ *definierte, n-stellige Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *mit geeigneter Funktion* $f(x)$ *(und zwar mit* $f(x) \equiv (Ey_\varrho)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, R(x, y_1, \ldots, y_n)]$), *in der Form* $(Ex)(f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n))$[13]), *ferner, mit geeigneter Funktion* $g(x)$ *(und zwar mit* $g(x) \equiv (y_\varrho)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow$ $\rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$), *in der Form* $(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow g(x)]$ *darstellen.*

---

[13]) Berücksichtigt man, daß $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sich in der Form $R_1(x, x_1) \,\&\, R_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_n(x, x_n)$ darstellen läßt (vgl. darüber Fußnote [10])); so erhält man hieraus, daß jede in einem unendlichen Individuenbereich definierte Funktion sich in der Form $(Ex)[f(x) \,\&\, R_1(x, x_1) \,\&\, R_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_n(x, x_n)]$ und, indem man $S_i(x, y)$ gleich $f(x) \,\&\, R_i(x, y)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ setzt, auch in der Form $(Ex)[S_1(x, x_1) \,\&\, S_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, S_n(x, x_n)]$ darstellen läßt. Diese letzte Darstellbarkeit (in abzählbaren Individuenbereichen) wurde von K. Gödel beim Entscheidungsproblem verwendet (Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 40 (1932), S. 433–443, insb. S. 441).

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind in diesem Satz durch die Funktionen $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sogar eindeutig bestimmt. Es genügt, dies für $f(x)$ zu zeigen. Für $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bestehen außer *a)* und *b)* offenbar auch die folgenden beiden Tatsachen:

c) $(y_\varrho)_1^n (x)(z)[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(z, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow (x = z)]$,

d) $(x)(Ey_\varrho)_1^n R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Aus $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ex)(f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n))$ folgt zunächst

$$(Ey_\varrho)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)] \sim$$
$$\sim (Ey_\varrho)_1^n [(Ez)(f(z) \& R(z, y_1, y_2, \ldots, y_n)) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)].$$

Wegen *c)* ist aber — wie man leicht einsieht —

$$[(Ez)(f(z) \& R(z, y_1, y_2, \ldots, y_n)) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)] \sim$$
$$\sim [f(x) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

und daher ist

$$(Ey_\varrho)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)] \sim$$
$$\sim [f(x) \& (Ey_\varrho)_1^n R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)].$$

Da aber $(Ey_\varrho)_1^n R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ wegen *d)* wahr ist, so folgt aus dieser Äquivalenz sofort

$$(Ey_\varrho)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)] \sim f(x)$$

womit $f(x)$ eindeutig bestimmt ist, w. z. b. w.

Aus dem Satze 8 ergibt sich gemäß Satz 1 sofort der folgende

Satz 9. *Ist $\Phi(x, y, z)$ eine Funktion, die eineindeutig die Elemente x aus dem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y, z]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ abbildet, so läßt sich jede in $\mathfrak{J}$ definierte n-stellige Funktion ($n \geqq 2$) $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)$,*[14] *mit geeigneter Funktion $f(v_1)$ $\left(\text{und zwar mit } f(v_1) \equiv (Ey_\varrho)_1^{n-1} (Ev_\varrho)_2^n \left[F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \& \right.\right.$ $\left.\left. \& \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, y_i)\right]\right)$, in der Form $(Ev_\varrho)_1^{n-1} \left[f(v_1) \& \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$,*

[14]) Die n-te (letzte) Variable bezeichnen wir statt x_n mit v_n, um statt

$$(Ev_\varrho)_1^{n-1} \left[f(v_1) \& \sum_{i=1}^{n-2} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \& \Phi(v_{n-1}, x_n, x_{n-1})\right]$$

kürzer $(Ev_\varrho)_1^{n-1} \left[f(v_1) \& \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$ schreiben zu können.

ferner, mit geeigneter Funktion $g(v_1)$ $\Big($*und zwar mit* $g(v_1) \equiv$ $\equiv (y_\varrho)_1^{n-1} (v_\varrho)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, y_i) \to F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \right] \Big)$, *in der Form* $(v_\varrho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \to g(v_1) \right]$ *darstellen.*

Setzt man hier $R_1(x, y) \,\&\, R_2(x, z)$ für $\Phi(x, y, z)$ ein, so erhält man unmittelbar folgenden

Satz 10. *Ist* $R_1(x, y) \,\&\, R_2(x, z)$ *eine Funktion, die eineindeutig die Elemente* x *aus einem Individuenbereich* $\mathfrak{J}$ *auf die Paare* $[y, z]$ *von solchen abbildet, so läßt sich jede in* $\mathfrak{J}$ *definierte n-stellige Funktion* $(n \geqq 2)$ $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)$, *mit geeigneter Funktion* $f(v_1)$ $\Big($*und zwar mit*

$$f(v_1) \equiv (E y_\varrho)_1^{n-1} (E v_\varrho)_2^n \Big[F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \,\& \\ \& \sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, y_i)) \Big] \Big),$$

in der Form $(E v_\varrho)_1^{n-1} \left[f(v_1) \,\& \sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \right]$, *ferner, mit geeigneter Funktion* $g(v_1)$ $\Big($*und zwar mit*

$$g(v_1) \equiv (y_\varrho)_1^{n-1} (v_\varrho)_2^n \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, y_i)) \to \\ \to F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \Big] \Big),$$

in der Form $(v_\varrho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \to g(v_1) \right]$ *darstellen.*

Es gilt ferner folgender

Satz 11. *Ist* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *eine Funktion, welche eineindeutig die Elemente* x *eines Individuenbereichs* $\mathfrak{J}$ *auf die n-tupel* $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *von solchen abbildet, so bestehen für jede Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *über* $\mathfrak{J}$ *die beiden Äquivalenzen*

$$(x_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (x)(E x_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

und

$$(E x_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (E x)(x_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)].$$

Beweis: Aus $(x_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und aus der richtigen Formel $(x)(Ex_\varrho)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ folgt durch n-malige Anwendung der Regel $[(x) F(x) \& (Ex) G(x)] \rightarrow (Ex)(F(x) \& G(x))$ sofort $(x)(Ex_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& F(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$. Umgekehrt: aus der letzten Formel und der, wegen der über $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gemachten Voraussetzung, richtigen Formel

$$(y_\varrho)_1^n (Ex) R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

ergibt sich durch Anwendung der Regel

$$[(x) F(x) \& (Ex) G(x)] \rightarrow (Ex)(F(x) \& G(x))$$

zunächst die Formel

$$(y_\varrho)_1^n (Ex)(Ex_\varrho)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& F(x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

aus welcher mit Berücksichtigung der Formel

$$(x)(x_\varrho)_1^n (y_\varrho)_1^n \left[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow \prod_{i=1}^{n} (x_i = y_i)\right]$$

leicht $(x_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gewonnen werden kann. Damit ist die erste Behauptung bewiesen; die zweite ergibt sich daraus durch Anwendung auf die Funktion $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nebst beiderseitigen Verneinung.

Satz 12. *Ist $\Phi(x, y, z)$ eine Funktion, welche eineindeutig die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y, z]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ abbildet, so bestehen für jede in $\mathfrak{J}$ definierte Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Äquivalenzen*

$$(x_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim$$
$$\sim (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\varrho)_2^n \left[\prod_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \& F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)\right]$$

und

$$(Ex_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim$$
$$\sim (Ev_1)(x_\varrho)_1^{n-1}(v_\varrho)_2^n \left[\prod_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)\right].$$

Satz 12 ergibt sich sofort aus den Sätzen 1 und 11.

Satz 13. *Ist $R_1(x, y) \& R_2(x, z)$ eine Funktion, welche eineindeutig die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y, z]$ von solchen abbildet, so bestehen für jede in $\mathfrak{J}$ definierte Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Äquivalenzen*

$$(x_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\varrho)_2^n \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2(v_i, x_i)) \mathbin{\&} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \Big]$$

und

$$(Ex_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ev_1)(x_\varrho)_1^{n-1}(v_\varrho)_2^n \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2(v_i, x_i)) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \Big].$$

Satz 13 erhält man aus Satz 12, indem man $R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z)$ für $\Phi(x, y, z)$ einsetzt.

In den obigen Sätzen haben wir auf verschiedene Darstellungen beliebiger logischer Funktionen hingewiesen. Diese Darstellungen gelten in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$, falls die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ sich auf die Paare $[y, z]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ eineindeutig abbilden lassen oder, was dasselbe bedeutet, falls die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{J}$ der Gleichung $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ genügt. Da $\aleph_0^2 = \aleph_0$ ist, so gelten diese Darstellungen insbesondere in abzählbaren Individuenbereichen und nur aus dieser Tatsache wird im folgenden, bei Anwendung auf das Entscheidungsproblem, Gebrauch gemacht (unter Berücksichtigung des bekannten Löwenheim—Skolemschen Satzes). Beiläufig stellen wir aber fest, daß alle diese Darstellungen auch in allen anderen unendlichen Individuenbereichen gelten, da ja nach einem bekannten mengentheoretischen Satz die Beziehung $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ überhaupt für jede transfinite Kardinalzahl besteht.[15])

Hinsichtlich der Äquivalenzen, von denen in den Sätzen 11, 12 und 13 die Rede ist, sei vorläufig bemerkt, daß sie zu Präfixänderungen sehr geeignet sind; sie erlauben uns nämlich Komplexe von Allzeichen gewissermaßen durch ein Allzeichen und ein Komplex von Seinszeichen, bzw. Komplexe von Seinszeichen durch ein Seinszeichen und ein Komplex von Allzeichen zu ersetzen.

---

[15]) Der genannte mengentheoretische Satz wird mit Benutzung des Auswahlprinzips bewiesen; die Heranziehung des Auswahlprinzips ist dabei unvermeidlich, da wie A. Tarski (Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix, *Fundamenta Math*, 5 (1924), S. 147—154) zeigte, der Satz bereits dem Auswahlprinzip äquivalent ist.

II. Reduktionssätze des mengentheoretischen Entscheidungsproblems.

Wir zeichnen eine dreistellige logische Funktionsvariable, etwa $\Phi(x, y, z)$, aus (wir nennen sie die „ausgezeichnete" dreistellige Funktionsvariable) und bilden mit ihr den Ausdruck

$$(13)\quad \begin{gathered} (x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z)\,\& \\ \&\,(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})\,[\Phi(x, y, z)\,\&\,\Phi(x, \overset{*}{y}, \overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y}\,\&\,z = \overset{*}{z}]\,\& \\ \&\,(y)(z)(Ex)\,\Phi(x, y, z)\,\& \\ \&\,(x)(\overset{*}{x})(y)(z)\,[\Phi(x, y, z)\,\&\,\Phi(\overset{*}{x}, y, z) \rightarrow x = \overset{*}{x}]. \end{gathered}$$

Ferner zeichnen wir zwei zweistellige logische Funktionsvariablen $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ aus (wir nennen sie die „ausgezeichneten" zweistelligen Funktionsvariablen), und die Formel, welche aus (13) hervorgeht, indem man $R_1(x, y)\,\&\,R_2(x, z)$ für $\Phi(x, y, z)$ einsetzt, bezeichnen wir mit (14). Wir stellen folgende zwei Definitionen auf:

D e f i n i t i o n 1. *Ein Zählausdruck A, welcher die ausgezeichnete dreistellige Funktionsvariable $\Phi(x, y, z)$ enthält, möge ein γ-Ausdruck heißen, wenn er dann und nur dann erfüllbar ist, falls das gleiche für den Ausdruck $A\,\&\,(13)$ zutrifft. Es ist klar, daß ein Erfüllungssystem von $A\,\&\,(13)$ erst recht den Zählausdruck A erfüllt; ein solches Erfüllungssystem nennen wir eine ausgezeichnete Erfüllung des Zählausdrucks A.*[16])

D e f i n i t i o n 2. *Ein Zählausdruck A, der die zwei ausgezeichneten zweistelligen Funktionsvariablen $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ enthält, möge ein β-Ausdruck heißen, wenn er dann und nur dann erfüllbar ist, falls das gleiche für den Ausdruck $A\,\&\,(14)$ zutrifft. Ein Erfüllungssystem von $A\,\&\,(14)$ ist zugleich ein Erfüllungssystem von A; ein solches Erfüllungssystem von A möge eine ausgezeichnete Erfüllung von A heißen.*[17])

---

[16]) Die hier angegebene Definition des Begriffs „γ-Ausdruck" kann auch anders ausgesprochen werden. Es gilt nämlich — wie man sofort einsieht —: Ein Zählausdruck A, der die ausgezeichnete Funktionsvariable Φ enthält (die übrigen Funktionsvariablen von A seien $F_1, F_2, \ldots, F_k$), ist ein γ-Ausdruck, wenn es, falls er überhaupt erfüllbar ist, einen Individuenbereich $\mathfrak{J}'$ und ein den Zählausdruck A in $\mathfrak{J}'$ erfüllendes System von Funktionen $F_1', F_2', \ldots, F_k', \Phi$ gibt, so daß durch die Funktion $\Phi'(x, y, z)$ eine eineindeutige Abbildung der Elemente x aus $\mathfrak{J}'$ auf die Paare von Elementen $[y, z]$ aus $\mathfrak{J}'$ geleistet wird. Ein solches Erfüllungssystem $F_1', F_2', \ldots, F_k', \Phi'$ in $\mathfrak{J}'$ ist ein ausgezeichnetes Erfüllungssystem von A.

[17]) Den Begriff des β-Ausdrucks habe ich zum ersten Mal in meiner

Es gilt folgender

S a t z 14. *Ist A ein γ-Ausdruck und geht B aus A hervor, indem man $R_1(x, y) \& R_2(x, z)$ für $\Phi(x, y, z)$ einsetzt*[18]) *so ist B ein mit A, in bezug auf die Erfüllbarkeit, gleichwertiger*[19]) *β-Ausdruck.*

B e w e i s: Sind $F_1, F_2, \ldots, F_k, \Phi$ die Funktionsvariablen aus A, so sind $F_1, F_2, \ldots, F_k, R_1, R_2$ die Funktionsvariablen aus B. Ist der Zählausdruck A erfüllbar, so hat er, als γ-Ausdruck, eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa $F_1', F_2', \ldots, F_k', \Phi'$ in $\mathfrak{J}'$; $\Phi'(x, y, z)$ läßt sich aber in der Form $R_1'(x, y) \& R_2'(x, z)$ darstellen[20]) und, wie man sofort einsieht, ist dann $F_1', F_2', \ldots, F_k', R_1', R_2'$ eine ausgezeichnete Erfüllung von B in $\mathfrak{J}'$. Also: Ist A erfüllbar, so ist es auch B und hat sogar eine ausgezeichnete Erfüllung. Ist umgekehrt B erfüllbar und ist $F_1'', F_2'', \ldots, F_k'', R_1'', R_2''$ ein Erfüllungssystem in $\mathfrak{J}''$, so erfüllt $F_1'', F_2'', \ldots, F_k'', R_1''(x, y) \& R_2''(x, z)$ offenbar den Zählausdruck A in $\mathfrak{J}''$; also: ist B erfüllbar so ist es auch A. Mithin sind A und B gleichwertige Zählausdrücke und da B, falls überhaupt erfüllbar, dann sogar eine ausgezeichnete Erfüllung besitzt[21]), so ist B außerdem ein β-Ausdruck, w. z. b. w.

Arbeit: Über einen Gödelschen Reduktionssatz der logischen Entscheidungstheorie (erscheint demnächst) eingeführt. Ich habe dort der Definition folgende, der oben angegebenen gleichwertige, Fassung gegeben: Ein Zählausdruck, welcher die Funktionsvariablen R_1, R_2 enthält (die übrigen Funktionsvariablen desselben seien $F_1, F_2, \ldots, F_k$), ist ein β-Ausdruck, wenn es, falls er überhaupt erfüllbar ist, einen Individuenbereich $\mathfrak{J}'$ und ein den Zählausdruck in $\mathfrak{J}'$ erfüllendes System von Funktionen $F_1', F_2', \ldots, F_k', R_1', R_2'$ gibt, so daß durch die Funktion $R_1'(z, x) \& R_2'(z, y)$ eine eineindeutige Abbildung der Elemente z aus $\mathfrak{J}'$ auf die Paare von Elementen $[x, y]$ aus $\mathfrak{J}'$ geleistet wird. Ein solches Erfüllungssystem $F_1', F_2', \ldots, F_k', R_1', R_2'$ in $\mathfrak{J}'$ bildet ein ausgezeichnetes Erfüllungssystem des Zählausdrucks.

18) Es wird hier gemeint, daß für die Nennform $\Phi(x, y, z)$ der Funktionsvariable Φ der Ausdruck $R_1(x, y) \& R_2(x, z)$ zur Einsetzung angegeben ist. (Bez. der Einsetzungsregel für Funktionsvariable vgl. das in Fußnote 3) zitierte Werk, S. 90.)

19) Zwei Zählausdrücke mögen gleichwertig in bezug auf die Erfüllbarkeit oder kurz gleichwertig heißen, wenn sie entweder beide erfüllbar oder beide nicht erfüllbar sind.

20) Da ja die Funktion $\Phi'(x, y, z)$ eineindeutig die Elemente x aus $\mathfrak{J}'$ auf die Paare $[y, z]$ von solchen abbildet.

21) Dies ergibt sich so: Ist B überhaupt erfüllbar, so ist es, nach dem oben Bewiesenen, auch A. Aus der Erfüllbarkeit von A folgt aber, wie wir ebenfalls oben bewiesen haben, die Existenz einer ausgezeichneten Erfüllung von B.

Satz 15. *Zu jedem Zählausdruck A läßt sich ein gleichwertiger γ-Ausdruck B angeben, der außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur einstellige Funktionsvariablen enthält.*

Beweis. Es sei A ein vorgegebener Zählausdruck, $F_1, F_2, \ldots, F_k$ die in ihm figurierenden mehrstelligen Funktionsvariablen und $g_1, g_2, \ldots, g_l$ seine einstelligen Funktionsvariablen; F_i soll r_i-stellig sein ($r_i > 1$ für $i = 1, 2, \ldots, k$). $f_1, f_2, \ldots, f_k$ seien k einstellige Funktionsvariablen, die voneinander und von $g_1, g_2, \ldots, g_l$ verschieden sind, ferner sei B der Zählausdruck, welcher aus A entsteht, indem man für die Funktionsvariable $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, v_{r_i})$ [22] den Ausdruck $(Ev_\varrho)_1^{r_i-1}\left[f_i(v_1) \mathbin{\&} \sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j)\right]$ einsetzt (für $i = 1, 2, \ldots, k$).

Der Zählausdruck B enthält außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur noch einstellige Funktionsvariablen, nämlich $f_1, f_2, \ldots, f_k, g_1, g_2, \ldots, g_l$; wir zeigen, daß B ein mit A gleichwertiger γ-Ausdruck ist. Ist A erfüllbar, so ist es, nach dem bekannten Löwenheim—Skolemschen Satz[23]), auch im Bereich der natürlichen Zahlen $\mathfrak{Z}$ erfüllbar. $F_1', F_2', \ldots, F_k', g_1', g_2', \ldots, g_l'$ sei dann ein den Zählausdruck A in $\mathfrak{Z}$ erfüllendes System. $\Phi'(x, y, z)$ sei eine Funktion, die eineindeutig die Zahlen x auf die Zahlenpaare $[y, z]$ abbildet; es genügt etwa $\Phi'(x, y, z) \equiv [x = 2^{y-1}.(2z-1)]$ zu setzen. Wir definieren die Funktionen $f_1', f_2', \ldots, f_k'$ durch die Festsetzung

$$f_i'(v_1) \equiv (Ey_\varrho)_1^{r_i-1}(Ev_\varrho)_2^{r_i}\left[F_i'(y_1, y_2, \ldots, y_{r_i-1}, v_{r_i}) \mathbin{\&} \sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi'(v_j, v_{j+1}, y_j)\right],$$

für $i = 1, 2, \ldots, k$.

Die Funktionen $f_1', f_2', \ldots, f_k', g_1', g_2', \ldots, g_l', \Phi'$ bilden dann eine ausgezeichnete Erfüllung des Zählausdrucks B, da ja wegen Satz 9 offenbar

$$F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, v_{r_i}) \equiv (Ev_\varrho)_1^{r_i-1}\left[f_i'(v_1) \mathbin{\&} \sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi'(v_j, v_{j+1}, x_j)\right].$$

---

[22]) Bez. der Bezeichnung der letzten Variable der Nennform von F_i mit v_{r_i} statt x_{r_i} vgl. Fußnote [14]).

[23]) L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen*, 76 (1915), S. 447—470, insb. Satz 2; Th. Skolem, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze usw., *Vidensk.-Selsk. Skrifter, Mat.-Naturw. Klasse*, 1920, Nr. 4, S. 1—36, insb. S. 3—10.

besteht (für $i=1, 2, \ldots, k$). Also: Ist A erfüllbar, so hat B eine ausgezeichnete Erfüllung. Ist nun umgekehrt B erfüllbar, $f_1'', f_2'', \ldots, f_k'', g_1'', g_2'', \ldots, g_l'', \Phi''$ ein Erfüllungssystem von B in $\mathfrak{Z}''$ und werden die Funktionen $F_1'', F_2'', \ldots, F_k''$ durch die Festsetzungen

$$F_i''(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, v_{r_i}) \equiv (E v_\varrho)_1^{r_i-1}\left[f_i''(v_1) \,\&\, \sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi''(v_j, v_{j+1}, x_j)\right],$$

für $i=1, 2, \ldots, k$ definiert, so erfüllt das System $F_1'', F_2'', \ldots, F_k''$, $g_1'', g_2'', \ldots, g_l''$ offenbar A. Also: Ist B erfüllbar, so ist es auch A. Aus diesen beiden Tatsachen folgt die Gleichwertigkeit der Ausdrücke A und B und außerdem, daß B γ-Ausdruck ist, w. z. b. w.[24])

Satz 16. *Zu jedem Zählausdruck A läßt sich ein gleichwertiger β-Ausdruck B angeben, der außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur einstellige Funktionsvariablen enthält.*[25])

Sei A ein vorgegebener Zählausdruck, $F_1, F_2, \ldots, F_k$ seine mehrstelligen und $g_1, g_2, \ldots, g_l$ seine einstelligen Funktionsvariablen; F_i soll r_i-stellig sein. $f_1, f_2, \ldots, f_k$ seien k einstellige Funktionsvariablen, die voneinander und von $g_1, g_2, \ldots, g_l$ verschieden sind, ferner sei B der Zählausdruck, welcher aus A entsteht, indem man für die Funktionsvariable $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, v_{r_i})$ den Ausdruck

$$(E v_\varrho)_1^{r_i-1}\left[f_i(v_1) \,\&\, \sum_{j=1}^{r_i-1} (R_1(v_j, v_{j+1}) \,\&\, R_2(v_j, x_j))\right]$$

einsetzt (für $i=1, 2, \ldots, k$).

Der Zählausdruck B enthält außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch einstellige Funktionsvariablen, nämlich $f_1, f_2, \ldots, f_k, g_1, g_2, \ldots, g_l$ und man zeigt leicht, indem man ähnlich wie beim Beweis von Satz 15 vorgeht, aber jetzt statt Satz 9 den Satz 10 berücksichtigt, daß A mit B gleichwertig

---

24) Zum Beweise des Satzes 15 könnte man für $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, v_{r_i})$, statt den Ausdruck $(E v_\varrho)_1^{r_i-1}\left[f_i(v_1) \,\&\, \sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j)\right]$, mit gleichem Erfolg auch $(v_\varrho)_1^{r_i-1}\left[\sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j) \rightarrow f_i(v_1)\right]$ einsetzen. Nur müßte man sich dann mit der zweiten Darstellung in Satz 9 bedienen.

25) In Satz 16 ist schon der bekannte Löwenheimsche Reduktionssatz (Vgl. die in Fußnote 23) angeführte Arbeit, insb. § 4) enthalten, da ja B nur einstellige und (zwei) zweistellige Funktionsvariablen besitzt.

ist und B außerdem ein β-Ausdruck ist. Einen anderen Beweis erhält man, indem man auf Satz 15 unmittelbar Satz 14 anwendet.

Satz 17. *Zu jedem Zählausdruck A läßt sich ein gleichwertiger γ-Ausdruck B angeben, der außer der ausgezeichneten Funktionsvariable $\Phi(x, y, z)$ nur einstellige Funktionsvariablen enthält und außerdem ein Skolemsches Präfix besitzt:* $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$.[26])

Wegen Satz 15 genügt es Satz 17, statt für beliebige Zählausdrücke A, für γ-Ausdrücke, in denen außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur noch einstellige vorkommen, zu beweisen. Sei nun A ein solcher Zählausdruck. A können wir uns ohne Einschränkung der Allgemeinheit in der pränexen Normalform denken. Es kann auch vorausgesetzt werden, daß das Präfix von A mit einem Allzeichen beginnt und mit einem Seinszeichen endet[27]). Das Präfix von A hat dann einen Grad [28]) n. Zum Beweise von Satz 17 genügt es also nur noch zu zeigen:

Satz 18. *Zu jedem γ-Ausdruck n-ten Grades ($n > 1$), welcher außer Φ nur einstellige Funktionsvariablen enthält, läßt sich ein gleichwertiger γ-Ausdruck $(n-1)$-ten Grades angeben, der außer Φ nur einstellige Funktionsvariablen enthält.*

Sei

$(x_\varrho)_1^{r_1}(Ex_\varrho)_{r_1+1}^{s_1}(x_\varrho)_{s_1+1}^{r_2}(Ex_\varrho)_{r_2+1}^{s_2}\ldots(x_\varrho)_{s_{n-1}+1}^{r_n}(Ex_\varrho)_{r_n+1}^{s_n}\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_{s_n})$ $(r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \ldots < r_n < s_n)$ ein γ-Ausdruck n-ten Grades, der außer Φ nur noch die einstelligen Funktionsvariablen $f_1, f_2, \ldots, f_k$ enthält. Auf diesen wende man das bekannte Skolemsche Ver-

---

[26]) Bekanntlich kann man jeden Zählausdruck auf eine Art Normalform bringen (pränexe Normalform), in der am Anfang ein System von unverneinten Quantoren (All- und Seinszeichen) steht; das voranstehende Quantorensystem nennen wir nach K. Gödel (Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 37 (1930), S. 349—360) das Präfix des Zählausdrucks. Eine pränexe Normalform, in der die Allzeichen sämtlich den Seinszeichen vorangehen, nennen wir eine Skolemsche Normalform und das entsprechende Präfix nennen wir ein Skolemsches Präfix.

[27]) Vgl. darüber S. 352 der in Fußnote [26]) zitierten Arbeit von Gödel. Für $F(x)$ braucht man aber keine neue Funktionsvariable zu nehmen; es genügt eine schon in A vorkommende.

[28]) Der Begriff „Grad eines Präfixes" soll im selben Sinn verstanden werden wie in der in Fußnote [26]) zitierten Arbeit von Gödel (S. 352). Präfixe ersten Grades sind die Skolemschen Präfixe. Pränexe Normalformen, die ein Präfix n-ten Grades besitzen, sollen Ausdrücke bzw. Normalformen n-ten Grades heißen.

fahren[29]) an, nur mit der Modifikation, daß man statt der dabei üblicherweise verwendeten s_1-stelligen Funktionsvariablen $F(x_1, x_2, \ldots, x_{s_1-1}, v_{s_1})$ den Ausdruck

$$(Ev_\varrho)_1^{s_1-1}\left[f_{k+1}(v_1)\,\&\sum_{j=1}^{s_1-1}\Phi(v_j, v_{j+1}, x_j)\right]$$

setzen soll[30]), wobei f_{k+1} eine von $f_1, f_2, \ldots, f_k$ verschiedene Funktionsvariable ist. Der erhaltene Zählausdruck enthält dann, außer Φ, nur die einstelligen Funktionsvariablen $f_1, f_2, \ldots, f_k, f_{k+1}$, läßt sich auf die pränexe Normalform $(n-1)$-ten Grades bringen und ist außerdem ein mit dem vorgegebenen Ausdruck gleichwertiger γ-Ausdruck. Das letztere ergibt sich folgendermaßen: Ist der vorgegebene Zählausdruck erfüllbar, so hat er, als γ-Ausdruck, eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa $f_1', f_2', \ldots, f_k', \Phi'$ über $\mathfrak{J}'$. Wir setzen

$$f_{k+1}'(v_1) \equiv (Ey_\varrho)_1^{s_1-1}(Ev_\varrho)_2^{s_1}(x_\varrho)_{s_1+1}^{r_2}(Ex_\varrho)_{r_2+1}^{s_2}\ldots(x_\varrho)_{s_{n-1}+1}^{r_n}(Ex_\varrho)_{r_n+1}^{s_n}\Big[\mathfrak{A}'(y_1, , y_2, \ldots, y_{s_1-1}, v_{s_1}, x_{s_1+1}, \ldots, x_{s_n})\,\&\sum_{i=1}^{s_1-1}\Phi'(v_i, v_{i+1}, y_i)\Big],$$

wobei $\mathfrak{A}'$ den durch Einsetzung der f_i', Φ' an Stelle der f_i, Φ aus $\mathfrak{A}$ entstehenden Ausdruck bedeutet. Man zeigt leicht, indem man Satz 9 berücksichtigt, daß $f_1'. f_2', \ldots, f_k', f_{k+1}', \Phi'$ eine ausgezeichnete Erfüllung des erhaltenen Zählausdrucks ist. Ist umgekehrt der erhaltene Zählausdruck erfüllbar und $f_1'', f_2'', \ldots, f_k'', f_{k+1}'', \Phi''$ irgendein Erfüllungssystem, so zeigt man leicht, indem man ähnlich wie beim unmodifizierten Skolemschen Verfahren argumentiert, daß $f_1'', f_2'', \ldots, f_k'', \Phi''$ den ursprünglichen (vorgegebenen) Zählausdruck erfüllt. Damit ist aber Satz 18 und daher auch Satz 17 bewiesen.

Satz 19. *Zu jedem Zählausdruck läßt sich ein gleichwertiger β-Ausdruck angeben, der außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur einstellige Funktionsvariablen enthält und außerdem das Skolemsche Präfix besitzt.*

Der Satz 19 wird ähnlich wie Satz 17 bewiesen. Nur soll jetzt,

---

[29]) Vgl. die in Fußnote [23]) zitierte Arbeit von Skolem, insb. S. 4—6. Vgl. auch die in Fußnote [26]) zitierte Arbeit von Gödel, insb. S. 353.

[30]) Diese an das Skolemsche Verfahren angebrachte Modifikation erlaubt uns den Grad n auf $n-1$ mit Hilfe *einer einzigen einstelligen* Funktionsvariable, statt mit einer s_1-stelligen, herabzusetzen. Eine andere Modifikation hat Gödel an das Skolemsche Verfahren angebracht um, statt einer s_1-stelligen, mit s_1 zweistelligen Funktionsvariablen auszukommen; vgl. Fußnote [13]).

statt $(Ev_\varrho)_1^{s_1-1}\left[f_{k+1}(v_1) \,\&\, \sum_{j=1}^{s_1-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j)\right]$, beim Skolemschen Verfahren der Ausdruck $(Ev_\varrho)_1^{s_1-1}\left[f_{k+1}(v_1) \,\&\, \sum_{j=1}^{s_1-1} (R_1(v_j, v_{j+1}) \,\&\, R_2(v_j, x_j))\right]$ verwendet werden und statt Satz 9 soll jetzt Satz 10 berücksichtigt werden. Einen anderen Beweis erhält man, indem man auf Satz 17 unmittelbar Satz 14 anwendet.

Die Sätze 15, 16, 17 und 19 können selbstverständlich auch als Reduktionssätze des Entscheidungsproblems aufgefaßt werden. Satz 17, als Reduktionssatz aufgefaßt, besagt, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit, auf solche Zählausdrücke beschränken kann, die die Skolemsche Normalform haben, γ-Ausdrücke sind und, außer der dreistelligen ausgezeichneten Funktionsvariable Φ, nur einstellige Funktionsvariablen enthalten. Satz 19 besagt, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf solche Zählausdrücke beschränken kann, die die Skolemsche Normalform haben, β-Ausdrücke sind und, außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2, nur einstellige Funktionsvariablen enthalten.

Diese Reduktionssätze lassen sich in verschiedenen Richtungen verschärfen. Eine Verschärfung besteht darin, daß wir die Anzahl der einstelligen Funktionsvariablen, die in diesen Reduktionssätzen unbestimmt ist, näher bestimmen. Dies gelingt, indem wir ein Resultat von J. Herbrand[31]) berücksichtigen. Dieses Resultat besagt, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit, auf solche Zählausdrücke beschränken kann, die eine einzige, und zwar dreistellige Funktionsvariable enthalten. Sei A ein solcher Zählausdruck und $\Psi(x, y, z)$ die einzige vorkommende Funktionsvariable. Wir setzen in A für $\Psi(x, y, z)$ den Ausdruck $(Ev_1)(Ev_2)[f(v_1) \,\&\, \Phi(v_1, v_2, x) \,\&\, \Phi(v_2, z, y)]$ ein, wobei f eine beliebige einstellige und Φ die ausgezeichnete dreistellige Funktionsvariable ist. Der so aus A entstehende Zählausdruck B enthält dann außer Φ nur die einzige einstellige Funktionsvariable f und ist ein mit A gleichwertiger γ-Ausdruck. Dies letztere wird genau so wie Satz 15 bewiesen. Wir haben damit den

[31]) J. Herbrand, Sur le problème fondamental de la logique mathématique, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III*, **24** (1931), S. 12—56, insb. S. 39—41.

S a t z 20. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die γ-Ausdrücke sind und außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur eine einstellige Funktionsvariable enthalten.*

Aus Satz 20 und Satz 14 folgt sofort

S a t z 21. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind und außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur eine einzige einstellige Funktionsvariable enthalten.*

Wir wollen jetzt zeigen:

S a t z 22. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die γ-Ausdrücke sind, das Skolemsche Präfix $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ besitzen und außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Zu diesem Zweck zeigen wir zunächst:

S a t z 23. *Zu jedem Zählausdruck läßt sich ein gleichwertiger γ-Ausdruck angeben, der ein Präfix dritten Grades besitzt und außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur noch eine einstellige Funktionsvariable enthält.*

Sei A ein beliebiger Zählausdruck. Nach einem von GÖDEL[32]) herrührenden Satz läßt sich zunächst zu A ein gleichwertiger Zählausdruck mit nur zweistelligen Funktionsvariablen und mit Skolemschen Präfix angeben.[33]) Es sei

$$(x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q) \quad (p<q)$$

dieser Zählausdruck und $F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots, F_n(x, y)$ seine Funktionsvariablen. Es sei $\Psi(x, y, z)$ eine dreistellige Funktionsvariable und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seien n gebundene Variablen, die voneinander und von den $x_1, x_2, \ldots, x_q$ verschieden sind. Es bezeichne $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ den Ausdruck, der durch Einsetzung der $\Psi(x_k, x_l, y_i)$ an Stelle der $F_i(x_k, x_l)$ (für $k, l = 1, 2, \ldots, q$ und $i = 1, 2, \ldots, n$) aus $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ entsteht. Der Zählausdruck

$$(Ey_\varrho)_1^n (x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q \left[\sum_{i=1}^{p} \Psi(x_i, x_i, x_i) \to \left(\sum_{i=p+1}^{q} \Psi(x_i, x_i, x_i) \,\& \right.\right.$$
$$\left.\left. \& \, \mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_n) \right) \right] \& \, (Ex)\, \Psi(x, x, x)$$

[32]) Vgl. die in Fußnote [13]) zitierte Arbeit, insb. S. 441.

[33]) Man könnte an dieser Stelle Satz 19 anwenden; es genügt aber der schwächere Gödelsche.

ist dann, wie man leicht beweisen kann,[34]) ein mit

$$(x_\varrho)_1^p\,(Ex_\varrho)_{p+1}^q\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q),$$

also auch mit A gleichwertiger Zählausdruck, enthält nur die Funktionsvariable Ψ und läßt sich auf eine pränexe Normalform zweiten Grades bringen. Wird in diesem Zählausdruck für $\Psi(x, y, z)$ der Ausdruck $(Ev_1)(Ev_2)\,[f_1(v_1)\,\&\,\Phi(v_1, v_2, x)\,\&\,\Phi(v_2, z, y)]$ eingesetzt, so entsteht ein mit A gleichwertiger Zählausdruck B, der ein γ-Ausdruck ist, außer Φ nur noch eine (einstellige) Funktionsvariable f_1 enthält und der sich außerdem auf eine pränexe Normalform dritten Grades bringen läßt. Dies letztere sieht man leicht ein, indem man den Kern[35]) des vorletzten Zählausdrucks (mit der einzigen Funktionsvariable Ψ) auf die konjunktive oder disjunktive Normalform bringt. Damit ist aber Satz 23 bewiesen. Aus Satz 23 folgt aber auch sofort Satz 22. Ist nämlich A ein beliebig vorgegebener Zählausdruck, so finden wir, wegen Satz 23, zunächst einen gleichwertigen γ-Ausdruck dritten Grades B mit einer einzigen (nämlich einstelligen) Funktionsvariable außer Φ. Um nun einen mit B, also auch mit A, gleichwertigen Zählausdruck ersten Grades, mit drei einstelligen Funktionsvariablen und der dreistelligen ausgezeichneten Φ, zu erhalten, genügt es auf B zweimal das Skolemsche Verfahren anzuwenden, nur aber in der modifizierten Form, wie wir es beim Beweis des Satzes 18 verwendet haben.

Satz 24. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, das Skolemsche Präfix besitzen und außer den zwei zweistelligen Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Dieser Satz folgt sofort aus den Sätzen 22 und 14.

Satz 25. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, das Gödelsche*[36])

---

[34]) Vgl. darüber L. Kalmár, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich*, 1932, Bd. II, S. 337—338.

[35]) So nennt man nach L. Kalmár den von Quantoren freien Bestandteil einer pränexen Normalform. [Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, *Math. Annalen*, **108** (1933), S. 466—484.]

[36]) Gödel hat gezeigt, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf Zählausdrücke mit einem Präfix der Form $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ beschränken darf (Vgl. die in Fußnote [13]) zitierte Arbeit).

Präfix $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)\dots(Ey_s)$ *besitzen und nur 6 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.*

Sei A ein beliebiger Zählausdruck. Wegen Satz 24 finden wir zu demselben einen gleichwertigen Zählausdruck B, der ein β-Ausdruck ist, ein Skolemsches Präfix besitzt und außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch drei, nämlich einstellige, Funktionsvariablen enthält. Zum Beweise des Satzes 25 genügt es nur noch zu zeigen, daß zu B ein gleichwertiger β-Ausdruck D konstruiert werden kann, der ein Gödelsches Präfix besitzt und nur sechs Funktionsvariablen enthält, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.

Sei $(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_s)$ der β-Ausdruck B; seine Funktionsvariablen (außer R_1, R_2) seien f_1, f_2, f_3. Wir bezeichnen mit C die Konjunktion der folgenden drei Formeln:

$$(C_1)\qquad (v_1)(Ev_\varrho)_2^r(Ew_\varrho)_2^r(Ey_\varrho)_1^s\Big[\prod_{i=1}^{r-1}(R_1(v_i, v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i, w_{i+1}))\,\&\\ \&\,\mathfrak{A}(v_r, w_2, w_3, \dots, w_r; y_1, y_2, \dots, y_s)\Big],$$

$$(C_2)\qquad (x)(y)(Ez)[R_1(z,x)\,\&\,R_2(z,y)],$$

$$(C_3)\quad (x)(y)(z)[(R_1(x,y)\&R_1(x,z)\to y=z)\&(R_2(x,y)\&R_2(x,z)\to y=z)].$$

Der Ausdruck C enthält dann dieselben Funktionsvariablen f_1, f_2, f_3, R_1, R_2 und außerdem aber noch das Identitätszeichen. Wir zeigen jetzt, daß B mit C gleichwertig ist.

Ist der Zählausdruck B erfüllbar, so hat er, als β-Ausdruck, sogar eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ über $\mathfrak{J}'$. Dieses Erfüllungssystem bildet dann auch eine ausgezeichnete Erfüllung von C. Sei nämlich v_1 ein beliebig aus $\mathfrak{J}'$ vorgegebenes Element. Wir bestimmen zunächst weitere $2.(r-1)$ Elemente v_i, w_i $(i=2, 3, \dots, r)$ rekursiv in $\mathfrak{J}'$, indem wir für $i=1, 2, \dots, r-1$ das dem Elemente v_i in der durch die Relation $R_1'(z,x)\,\&\,R_2'(z,y)$ geleisteten Abbildung zugeordnete Elementepaar mit $[v_{i+1}, w_{i+1}]$ bezeichnen, wodurch $\prod_{i=1}^{r-1}(R_1'(v_i, v_{i+1})\ \&\ R_2'(v_i, w_{i+1}))$ richtig wird. Wegen der vorausgesetzten Erfüllbarkeit des Zählausdrucks B durch das System $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ können wir weiter zu den Elementen $v_r, w_2, w_3, \dots, w_r$ s Elemente $y_1, y_2, \dots, y_s$ in $\mathfrak{J}'$ finden, so daß $\mathfrak{A}'(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ besteht[37]); hiermit ist aber C_1 als eine durch das System $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ erfüllbare Formel nachgewiesen[38]) und da ja C_2, C_3 bei dieser Erfüllung offenbar richtig sind, so gilt dasselbe auch für C.

Es sei nun umgekehrt $f_1'', f_2'', f_3'', R_1'', R_2''$ ein den Ausdruck C in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}''$ erfüllendes System und $x_1, x_2, \ldots, x_r$ irgendwelche r Elemente aus $\mathfrak{J}''$; wir bestimmen zunächst weitere r Elemente $t_1, t_2, \ldots, t_r$ aus $\mathfrak{J}''$ rekursiv folgendermaßen:

Wir setzen

(15) $$t_1 = x_1$$

und unter den gemäß C_2 existierenden Elementen greifen wir für jedes Paar $t_i, x_{(r+1)-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ ein Element heraus und bezeichnen es mit t_{i+1}.

Dadurch sind die Elemente $t_1, t_2, \ldots, t_r$ in $\mathfrak{J}''$ definiert und es gilt

(16) $$R_1''(t_{i+1}, t_i) \,\&\, R_2''(t_{i+1}, x_{(r+1)-i})$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Setzt man hier $r-i$ für i ein, so ergibt sich

(17·1) $$R_1''(t_{(r+1)-i}, t_{r-i}),$$

(17·2) $$R_2''(t_{(r+1)-i}, x_{i+1})$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Wegen C_1 gibt es weiter für

(18) $$v_1 = t_r$$

Elemente v_i, w_i $(i = 2, 3, \ldots, r)$ und y_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ in $\mathfrak{J}''$, so daß

(19·1) $$R_1''(v_i, v_{i+1}),$$

(19·2) $$R_2''(v_i, w_{i+1})$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$ und

(20) $$\mathfrak{A}''(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r;\ y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

bestehen.

Zwischen den v_i und den früher definierten t_i besteht aber die Beziehung

(21) $$v_i = t_{(r+1)-i}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r$. Für $i = 1$ besteht sie wegen (18). Angenommen, es sei $v_i = t_{(r+1)-i}$ bei einem $i \leqq r-1$, dann gilt wegen (17·1)

---

37) $\mathfrak{A}'$ bedeute den durch Einsetzung von $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ bzw. an Stelle von f_1, f_2, f_3, R_1, R_2 aus $\mathfrak{A}$ entstehenden Ausdruck. Analog unten $\mathfrak{A}''$.

38) Die Tatsache, daß die ausgezeichnete Erfüllung von B auch den Ausdruck C_1 erfüllt, kann auch leicht aus Satz 13 entnommen werden.

$R_1''(v_i, t_{r-i})$, was zusammen mit (19·1) gemäß C_3 $v_{i+1} = t_{r-i} = t_{(r+1)-(i+1)}$ ergibt. Hiermit ist aber (21) durch Induktion bewiesen.

Tragen wir (21) in (17·2) ein, so erhalten wir $R_2''(v_i, x_{i+1})$ für $i = 1, 2, \ldots, r-1$ und dies in Verbindung mit (19·2) ergibt wegen C_3

(22) $$w_{i+1} = x_{i+1}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Setzen wir weiter in (21) $i = r$, so erhalten wir $v_r = t_1$, was zusammen mit (15)

$$v_r = x_1$$

ergibt. Dieses und (22) in (20) eingetragen liefern $\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$, womit (da ja $x_1, x_2, \ldots, x_r$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{J}''$ waren) B als in $\mathfrak{J}''$ erfüllbare Formel nachgewiesen ist.

Die Ausdrücke B und C sind also gleichwertig und C läßt sich auf eine Skolemsche Normalform mit nur 3 Allzeichen bringen, die aber noch das $=$-Zeichen enthält. Eliminiert man dieses nach dem Kalmár—Gödelschen Verfahren[39]) und führt statt dessen die Funktionsvariable R_3 ein, so erhält man einen mit C, also auch mit A, gleichwertigen Zählausdruck D, welcher nur die sechs Funktionsvariablen $f_1, f_2, f_3, R_1, R_2, R_3$ enthält und sich auf eine Normalform mit einem Gödelschen Präfix bringen läßt,[40]) w. z. b. w.

S a t z 26. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die ein Präfix der Form* $(x_1)(x_2)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)(x_3)$ *besitzen und nur 6 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.*

S a t z 27. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die ein Präfix der Form* $(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(x_3)(Ey_n)$ *haben und nur 6 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.*

Die Beweise der Sätze 26 und 27 ergeben sich leicht aus dem Beweise des Satzes 25. Es ist nur zu beachten, daß die Konjunktionsformel $C_1 \& C_2 \& C_3$ sich auch auf eine pränexe Normalform mit einem Präfix der Gestalt $(x_1)(x_2)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)(x_3)$ bzw. der Gestalt $(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(x_3)(Ey_n)$ bringen

[39]) Vgl. L. Kalmár, Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie, *diese Acta*, 4 (1929), S. 248—252; vgl. auch die in Fußnote [26]) zitierte Arbeit von Gödel, insb. S. 356—357.

[40]) Aus dem Beweis ist ersichtlich, daß D sogar ein β-Ausdruck ist.

läßt[41]) und daß das Kalmár–Gödelsche Verfahren diese Präfixe beizubehalten erlaubt.

Satz 28. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke beschränken, die γ-Ausdrücke sind, die pränexe Normalform mit nur drei Seinszeichen besitzen und außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Zum Beweis genügt es, wegen Satz 22, zu zeigen, daß zu jedem γ-Ausdruck A mit Skolemschen Präfix und nur drei einstelligen Funktionsvariablen (außer der ausgezeichneten Φ) ein gleichwertiger γ-Ausdruck B angegeben werden kann, der genau dieselben Funktionsvariablen besitzt und im Präfix nur drei Seinszeichen enthält.

Sei nun A gleich $(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$. Die Funktionsvariablen aus A seien f_1, f_2, f_3, Φ. Sei B die Konjunktion der folgenden beiden Formeln B_1, B_2:

$$(B_1)\qquad (x_\varrho)_1^r(Ev_1)(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}\Big[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, w_i)\rightarrow \rightarrow\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s)\Big],$$

$$(B_2)\qquad (x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z).$$

Ist A erfüllbar, so hat es, als γ-Ausdruck, sogar eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa f_1', f_2', f_3', Φ' in $\mathfrak{J}'$. Dieses Erfüllungssystem bildet dann auch eine ausgezeichnete Erfüllung von B. In der Tat, — wie man leicht einsieht — besteht wegen Satz 12 für je r Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_r$ aus $\mathfrak{J}'$ die Äquivalenz

$$(Ey_\varrho)_1^s\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)\sim$$
$$\sim(Ev_1)(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}\Big[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi'(v_i, v_{i+1}, w_i)\rightarrow \rightarrow\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s)\Big],$$

aus welcher sofort die Äquivalenz

$$(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)\sim$$
$$\sim(x_\varrho)_1^r(Ev_1)(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}\Big[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi'(v_i, v_{i+1}, w_i)\rightarrow \rightarrow\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s)\Big]$$

[41]) An dieser Stelle, wie auch am Ende des Beweises von Satz 25, ist die Äquivalenz $(x)[f(x)\,\&\,g(x)]\equiv[(x)f(x)\,\&\,(y)g(y)]$ zu berücksichtigen.

folgt. Da aber, gemäß der gemachten Voraussetzung

$$(x_\varrho)_1^r\,(Ey_\varrho)_1^s\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

besteht ($\mathfrak{A}'$ bedeutet ja den aus $\mathfrak{A}$ durch Einsetzung von f_1', f_2', f_3', Φ' an Stelle von f_1, f_2, f_3, Φ entstehenden Ausdruck), so folgt aus der letzten Äquivalenz unmittelbar

$$(x_\varrho)_1^r\,(Ev_1)\,(v_\varrho)_2^s\,(w_\varrho)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi'(v_i, v_{i+1}, w_i) \rightarrow \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{s-1}, v_s)\right].$$

f_1', f_2', f_3', Φ' erfüllt also den Ausdruck B_1, und da dasselbe offenbar auch für B_2 besteht, so erfüllt das obige System auch B und bildet dessen ausgezeichnete Erfüllung. Ist umgekehrt B erfüllbar, $f_1'', f_2'', f_3'', \Phi''$ ein Erfüllungssystem in $\mathfrak{J}''$, so erfüllt dieses System auch A. Denn aus

$$(x_\varrho)_1^r(Ev_1)\,(v_\varrho)_2^s\,(w_\varrho)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, w_i) \rightarrow \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}\; v_s)\right]$$

folgt einerseits leicht

$$(v_1)\,(Ev_\varrho)_2^s\,(Ew_\varrho)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, w_i)\right] \rightarrow$$
$$\rightarrow (x_\varrho)_1^r(Ev_s)\,(Ew_\varrho)_1^{s-1}\,\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s);$$

andererseits folgt aus $(x)\,(Ey)\,(Ez)\,\Phi''(x, y, z)$, wegen Satz 2, leicht $(v_1)\,(Ev_\varrho)_2^s\,(Ew_\varrho)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, w_i)\right]$. Daher besteht also die Formel $(x_\varrho)_1^r(Ev_s)\,(Ew_\varrho)_1^{s-1}\,\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s)$, aus welcher, durch Unbenennung der Variablen,

$$(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\,\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

gewonnen werden kann. B ist also ein mit A gleichwertiger γ-Ausdruck und läßt sich außerdem auf die pränexe Normalform, mit nur drei Seinszeichen im Präfix, bringen, w. z. b. w. Was die Gestalt des Präfixes von B anbetrifft, so ist sie übrigens im großen Maße willkürlich; sie kann z. B. $(x_\varrho)_1^r(Ev_1)\,(Ey)\,(Ez)\,(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}$ oder $(x_\varrho)_1^r(Ev_1)\,(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}\,(Ey)\,(Ez)$ — je nach Verlangen — lauten.

S a t z 29. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form*

$(x_1)(x_2)\ldots(x_m)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)(x_{m+1})(x_{m+2})\ldots(x_{m+n})$ *besitzen und außer* R_1, R_2 *nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Satz 30. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form* $(x_1)(x_2)\ldots(x_m)(Ey_1)(x_{m+1})(x_{m+2})\ldots(x_{m+n})(Ey_2)Ey_3)$ *besitzen und außer* R_1, R_2 *nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Die Sätze 29, 30 gewinnt man leicht aus den Sätzen 28 und 14, nebst obiger Bemerkung betreffend der Gestalt des Präfixes.

Satz 31. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke beschränken, die außer fünf zweistelligen Funktionsvariablen nur noch einstellige enthalten und ein Präfix der Form* $(Ex_1)(Ex_2)(Ex_3)(Ex_4)(y_1)(y_2)(Ex_5)(y_3)(y_4)\ldots(y_n)$ *besitzen*

L. Kalmár hat bewiesen[42]), daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf binäre[43]) Zählausdrücke mit einem Präfix der Gestalt $(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_{m-1})(y_1)(y_2)(Ex_m)(y_3)(y_4)\ldots(y_n)$ beschränken darf. Nun sind wir imstande, indem wir sein Verfahren überhaupt nicht ändern, sondern es statt auf allgemeine, nur auf spezielle Zählausdrücke von der in Satz 30 genannten Gestalt anwenden, zu zeigen, daß der Spezialfall $m=5$ und nur 5 zweistellige Funktionsvariablen, statt einer unbestimmten Anzahl, bereits mit dem allgemeinen Entscheidungsproblem äquivalent ist. Es genügt nur zu bemerken, daß falls $\mathfrak{A}$ (a. a. O. [42]), S. 231) nur drei Seinszeichen enthält ($n_k=3$) und die Anzahl der in $\mathfrak{A}$ figurierenden zweistelligen Funktionsvariablen gleich zwei ist (was wegen unseres Satzes 30 ausreicht), dann besitzt der mit $\mathfrak{A}$ gleichwertige Zählausdruck $\mathfrak{B}$ (a. a. O. [42]), S. 234) nur 5 Seinszeichen und enthält außer einstelligen Funktionsvariablen nur 5 zweistellige Funktionsvariablen.

Satz 32. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form* $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$[44]) *besitzen und außer* R_1, R_2

[42]) L. Kalmár, Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem, *diese Acta*, **5** (1932), S. 222—236. Vgl. auch die Fußnote [5]) der Arbeit: L. Kalmár, Über einen Löwenheimschen Satz, *diese Acta*, **7** (1934), S. 112—121.

[43]) D. h. die nur Funktionsvariablen von höchstens zwei Argumenten enthalten.

[44]) Dieses Präfix kann in gewissem Sinne als Gegenteil des Gödelschen betrachtet werden.

nur noch eine mehrstellige und drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.

Sei A ein beliebiger Zählausdruck. Wegen Satz 30 läßt sich zu A ein gleichwertiger β-Ausdruck B angeben, der ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_m)(Ey_1)(x_{m+1})(x_{m+2})\ldots(x_{m+n})(Ey_2)(Ey_3)$ besitzt und außer R_1, R_2 nur noch drei einstellige Funktionsvariablen, etwa f_1, f_2, f_3, enthält. Das Präfix von B ist von zweitem Grade. Wenden wir nun auf B das Skolemsche Verfahren an (in unmodifizierter Form), so erhalten wir einen mit B, also auch mit A, gleichwertigen Zählausdruck C, welcher außer f_1, f_2, f_3, R_1, R_2 nur noch eine, nämlich eine $(m+1)$-stellige Funktionsvariable enthält und welcher ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$ besitzt. C ist übrigens — wie man leicht einsieht — sogar ein β-Ausdruck. Damit ist Satz 32 bewiesen.

S a t z 33. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die γ-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$ besitzen und außer Φ nur noch eine mehrstellige und drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Satz 33 ergibt sich aus Satz 28 (nebst Bemerkung zu Ende des Beweises) genau so, wie Satz 32 aus 30.

S a t z 34. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)(x_4)(x_5)\ldots(x_n)$ besitzen und nur 6 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.*

Zum Beweise des Satzes 34 genügt es, wegen Satz 25, zu zeigen, daß zu jedem β-Ausdruck A mit Gödelschem Präfix und nur drei einstelligen und drei zweistelligen Funktionsvariablen ein gleichwertiger β-Ausdruck B angegeben werden kann, der genau dieselben Funktionsvariablen enthält und ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)(x_4)(x_5)\ldots(x_n)$ besitzt. Sei nun A gleich $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_\varrho)_1^s\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, \ldots, y_s)$. Die Funktionsvariablen aus A seien $f_1, f_2, f_3, R_1, R_2, R_3$. Wir setzen B gleich der Konjunktion der folgenden zwei Formeln B_1, B_2

$$(B_1)\quad (x_1)(x_2)(x_3)(Ev_1)(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}(R_1(v_i, v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i, w_i)) \rightarrow \rightarrow \mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s)\right],$$

$$(B_2)\qquad (x)(Ey)(Ez)(R_1(x, y)\,\&\,R_2(x, z)).$$

Die Zählausdrücke A und B sind dann gleichwertig; dies wird ganz analog wie bei Satz 28 bewiesen, nur soll jetzt statt der zweiten Äquivalenz aus Satz 12 die aus Satz 13 berücksichtigt werden. B läßt sich weiter auf pränexe Normalform mit einem Präfix $(x_1)(x_2)(x_3)(Ev_1)(Ey)(Ez)(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}$ bringen, womit Satz 34 bewiesen ist. Da aber B sich auch auf pränexe Normalform mit einem Präfix $(x_1)(x_2)(x_3)(Ev_1)(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}(Ey)(Ez)$ bringen läßt, so gilt auch folgender

Satz 35. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(x_4)(x_5)\ldots(x_n)(Ey_2)(Ey_3)$ besitzen und nur 6 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.*

Wir beweisen jetzt den

Satz 36. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$ besitzen und nur 7 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige, drei zweistellige und eine vierstellige.*[45])

Sei A ein beliebiger Zählausdruck. Wegen Satz 35 läßt sich zu A ein gleichwertiger β-Ausdruck B angeben, der ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(x_4)(x_5)\ldots(x_n)(Ey_2)(Ey_3)$ besitzt und nur 6 Funktionsvariablen enthält, nämlich drei einstellige und drei zweistellige. Das Präfix von B ist von zweitem Grade. Wenden wir nun auf B das Skolemsche Verfahren an (in unmodifizierter Form), so erhalten wir einen mit B, also auch mit A, gleichwertigen Zählausdruck C, der außer den 6 Funktionsvariablen, die schon in B vorkommen, noch eine vierstellige Funktionsvariable enthält und sich auf die pränexe Normalform mit einem Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$ bringen läßt, w. z. b. w.

Satz 37. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die binäre β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)(Ey_4)$ besitzen und nur 3 einstellige und 7 zweistellige Funktionsvariablen enthalten.*

Dieser Satz ergibt sich, ähnlich wie Satz 36, aus Satz 35.

---

[45]) Satz 33 besagt, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf Zählausdrücke der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$ beschränken darf, die, statt 7, nur 5 Funktionsvariablen enthalten. Satz 33 ist aber doch schwächer, weil dort die Anzahl der Leerstellen einer Funktionsvariablen unbestimmt ist.

Nur soll jetzt auf B, statt des unmodifizierten Skolemschen Verfahrens, das durch Gödel modifizierte Verfahren[46]) angewendet werden. Dadurch werden statt einer vierstelligen Funktionsvariable vier zweistellige Funktionsvariablen herangezogen; im Präfix erscheint aber jetzt noch ein Seinszeichen.

Satz 38. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche β-Ausdrücke beschränken, die ein Präfix der Form* $(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(Ey_n)$ *(nur zwei Allzeichen!) besitzen und außer den ausgezeichneten Variablen R_1, R_2 und drei einstelligen Funktionsvariablen noch das $=$-Zeichen enthalten.*

Zum Beweise dieses Satzes genügt es, wegen Satz 24, nur zu zeigen, daß es zu jedem β-Ausdruck A mit Skolemschem Präfix und nur drei einstelligen Funktionsvariablen (außer R_1, R_2) ein gleichwertiger β-Ausdruck B angegeben werden kann, der ein Präfix der Gestalt $(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(Ey_n)$ besitzt und außer den Funktionsvariablen, die schon in A vorkommen, nur noch das $=$-Zeichen enthält.

Sei nun A gleich $(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$. Die Funktionsvariablen aus A seien f_1, f_2, f_3, R_1, R_2. Wir setzen B gleich der Konjunktion der folgenden beiden Formeln:[47])

$$(B_1)\quad \begin{aligned} &(v_1)(Ev_\varrho)_2^r(Ew_\varrho)_2^r(Ey_\varrho)_1^s(t)\Big[\sum_{i=1}^{r-1}((R_1(v_i, t)\rightarrow v_{i+1}=t)\,\& \\ &\quad\& (R_2(v_i, t)\rightarrow w_{i+1}=t))\,\&\,\mathfrak{A}(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)\Big], \end{aligned}$$

$$(B_2)\qquad (x)(y)(Ez)[R_1(z, x)\,\&\,R_2(z, y)].$$

Wir zeigen zunächst, daß A mit B gleichwertig ist.

Ist A erfüllbar, so hat er, als β-Ausdruck, sogar eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ über $\mathfrak{J}'$. Dieses Erfüllungssystem bildet dann auch eine ausgezeichnete Erfüllung von B. Sei nämlich v_1 ein beliebig aus $\mathfrak{J}'$ vorgegebenes Element. Wir bestimmen zunächst weitere $2.(r-1)$ Elemente v_i, w_i $(i=2, 3, \ldots, r)$ rekursiv in $\mathfrak{J}'$, indem wir für $i=1, 2, \ldots, r-1$ das dem Elemente v_i bei der durch die Relation $R_1'(z, x)\,\&\,R_2'(z, y)$ geleisteten Abbildung zugeordnete Elementepaar mit $[v_{i+1}, w_{i+1}]$ bezeichnen, wo-

---

46) Vgl. die Fußnoten 13) und 30).

47) Die Formel B_1 hat nur für $r > 1$ einen Sinn; es genügt aber nur diesen Fall zu betrachten, da ja der Fall $r=1$ sich in trivialer Weise erledigt.

durch $\sum_{i=1}^{r-1}(R_1'(v_i, v_{i+1}) \& R_2'(v_i, w_{i+1}))$ und daher, wegen der Eindeutigkeit der Abildung, auch

$$(t)\sum_{i=1}^{r-1}((R_1'(v_i, t) \to v_{i+1} = t) \& (R_2'(v_i, t) \to w_{i+1} = t))$$

richtig wird. Wegen der vorausgesetzten Erfüllbarkeit des Zählausdrucks A durch das System $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ können wir aber zu den Elementen $v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r$ s Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_s$ in $\mathfrak{J}'$ finden, so daß $\mathfrak{A}'(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ besteht; hiermit ist aber B_1 als durch das System $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ erfüllbare Formel nachgewiesen und da ja B_2 bei dieser Erfüllung offenbar richtig ist, so gilt dasselbe auch für B.

Es sei nun umgekehrt $f_1'', f_2'', f_3'', R_1'', R_2''$ ein den Ausdruck B in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}''$ erfüllendes System und $x_1, x_2, \ldots, x_r$ irgendwelche r Elemente aus $\mathfrak{J}''$; wir bestimmen zunächst weitere r Elemente $t_1, t_2, \ldots, t_r$ aus $\mathfrak{J}''$ rekursiv folgendermaßen:

Wir setzen

$$t_1 = x_1 \tag{23}$$

und unter den gemäß B_2 existierenden Elementen greifen wir für jedes Paar $t_i, x_{(r+1)-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ ein Element heraus und bezeichnen es mit t_{i+1}.

Dadurch sind die Elemente $t_1, t_2, \ldots, t_r$ in $\mathfrak{J}''$ definiert und es gilt

$$R_1''(t_{i+1}, t_i) \& R_2''(t_{i+1}, x_{(r+1)-i}) \tag{24}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Setzt man hier $r-i$ für i ein, so ergibt sich

$$R_1''(t_{(r+1)-i}, t_{r-i}), \tag{25·1}$$

$$R_2''(t_{(r+1)-i}, x_{i+1}) \tag{25·2}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Wegen B_1 gibt es weiter für

$$v_1 = t_r \tag{26}$$

Elemente v_i, w_i $(i = 2, 3, \ldots, r)$ und y_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ in $\mathfrak{J}''$, so daß

$$(t)(R_1''(v_i, t) \to v_{i+1} = t), \tag{27·1}$$

$$(t)(R_2''(v_i, t) \to w_{i+1} = t) \tag{27·2}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$ und

$$\mathfrak{A}''(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s) \tag{28}$$

bestehen.

Zwischen den v_i und den früher definierten t_i besteht aber die Beziehung

(29) $$v_i = t_{(r+1)-i}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r$. Für $i = 1$ besteht sie wegen (26). Angenommen, es sei $v_i = t_{(r+1)-i}$ bei einem $i \leqq r-1$, dann ist wegen (25·1) zunächst

(30) $$R_1''(v_i, t_{r-i}).$$

Aus (27·1) folgt aber $R_1''(v_i, t_{r-i}) \rightarrow v_{i+1} = t_{r-i}$, was zusammen mit (30) $v_{i+1} = t_{r-i} = t_{(r+1)-(i+1)}$ ergibt. Hiermit ist aber (29) durch Induktion bewiesen.

Tragen wir (29) in (25·2) ein, so erhalten wir

(31) $$R_2''(v_i, x_{i+1})$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Aus (27·2) folgt aber $R_2''(v_i, x_{i+1}) \rightarrow w_{i+1} = x_{i+1}$ für $i = 1, 2, \ldots, r-1$, was zusammen mit (31)

(32) $$w_{i+1} = x_{i+1}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$ ergibt.

Setzen wir weiter in (29) $i = r$, so erhalten wir $v_r = t_1$, was zusammen mit (23) $v_r = x_1$ ergibt.

Dieses und (32) in (28) eingetragen liefern $\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$, womit (da ja $x_1, x_2, \ldots, x_r$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{J}''$ waren) A als in $\mathfrak{J}''$ erfüllbare Formel nachgewiesen ist.

Die Ausdrücke A und B sind also gleichwertige β-Ausdrücke und B läßt sich, unter Berücksichtigung der Äquivalenz

$$(x)[F(x) \mathbin{\&} G(x)] \sim [(x) F(x) \mathbin{\&} (y) G(y)],$$

auf die pränexe Normalform mit einem Präfix $(v_1)(Ev_\varrho)_2^r(Ew_\varrho)_2^r(Ey_\varrho)_1^s(t)(Ez)$, also der gesuchten Gestalt, bringen, w. z. b. w.

Zum Schluß beweisen wir noch

Satz 39. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Ausdrücke beschränken, die außer dem $=$-Zeichen nur zwei, nämlich zweistellige, Funktionsvariablen enthalten und ein Präfix der Form* $(Ey_1)(x_1)(Ey_2)(Ey_3)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(Ey_n)$ *besitzen.*

Zum Beweise genügt es, wegen Satz 38, zu zeigen, daß zu jedem Ausdruck A mit einem Präfix der Gestalt $(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(Ey_n)$, der außer dem $=$-Zeichen nur 5 Funktionsvariablen, nämlich zwei zweistellige und drei einstellige, enthält, ein gleichwertiger Ausdruck B angegeben werden kann, welcher außer dem $=$-Zeichen nur zwei zweistellige Funktionsvariablen enthält und ein Präfix der Form $(Ey_1)(x_1)(Ey_2)(Ey_3)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(Ey_n)$ besitzt.

Sei nun A gleich $(x_1)(Ex_\varrho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und f_1, f_2, f_3, R_1, R_2 seien dessen Funktionsvariablen. Sei ferner y eine von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ verschiedene gebundene Variable und $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y)$ der Ausdruck, welcher aus $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ hervorgeht indem man (für $i=1, 2, \ldots, m$) $R_1(y, x_i)$ statt $f_1(x_i)$, $R_1(x_i, y)$ statt $f_2(x_i)$ und $R_2(y, x_i)$ statt $f_3(x_i)$ setzt. Der Ausdruck $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y)$ enthält dann, außer dem $=$-Zeichen, nur zwei Funktionsvariablen, nämlich R_1, R_2. Wir bezeichnen mit B folgenden Ausdruck:

$$(Ey)(x_1)(Ex_\varrho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\left\{\left(\overline{x_1 = y} \rightarrow \left[\sum_{i=2}^{m-2}\overline{x_i = y}\,\& \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\&\left(\overline{x_{m-1} = y} \rightarrow (\overline{x_m = y}\,\&\,\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y))\right)\right]\right)\&(Ez)(\overline{z = y})\right\}.$$

Die Ausdrücke A und B sind dann gleichwertig. Ist nämlich A erfüllbar und $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ ein Erfüllungssystem über $\mathfrak{J}'$, a irgendein von allen Elementen aus $\mathfrak{J}'$ verschiedener Gegenstand und werden die Funktionen $R_1'(x, y), R_2'(x, y)$ auf den durch das Element a vermehrten Bereich $\mathfrak{J}' + \{a\}$ durch die Festsetzungen $R_1'(a, x) \sim f_1'(x)$, $R_1'(x, a) \sim f_2'(x)$, $R_2'(a, x) \sim f_3'(x)$ für $x \in \mathfrak{J}'$ erweitert ($R_1'(a, a), R_2'(a, a)$, sowie $R_2'(x, a)$ für $x \in \mathfrak{J}'$ können beliebig definiert werden), so erfüllen die so erweiterten Funktionen R_1', R_2' offenbar den Ausdruck B in $\mathfrak{J}' + \{a\}$. Falls umgekehrt R_1'', R_2'' den Ausdruck B in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}''$ erfüllen, dann gibt es ein Element b in $\mathfrak{J}''$, so daß

$$(x_1)(Ex_\varrho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\left\{\left(\overline{x_1 = b} \rightarrow \left[\sum_{i=2}^{m-2}\overline{x_i = b}\,\& \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\&\left(\overline{x_{m-1} = b} \rightarrow (\overline{x_m = b}\,\&\,\mathfrak{B}''(x_1, x_2, \ldots, x_m; b))\right)\right]\right)\&(Ez)(\overline{z = b})\right\}$$

besteht.

Werden die Funktionen $f_1''(x), f_2''(x), f_3''(x)$ durch die Festsetzungen $f_1''(x) \sim R_1''(b, x)$, $f_2''(x) \sim R_1''(x, b)$, $f_3''(x) \sim R_2''(b, x)$ definiert, so erfüllen die, auf den Bereich $\mathfrak{J}'' - \{b\}$ beschränkten, Funktionen $f_1'', f_2'', f_3'', R_1'', R_2''$ offensichtlich den Ausdruck A ($\mathfrak{J}'' - \{b\}$ ist nicht leer, weil ja $(Ez)(\overline{z = b})$ in $\mathfrak{J}''$ besteht).

Die Ausdrücke A und B sind also gleichwertig und da B sich — wie man leicht einsieht — auf die pränexe Normalform mit einem Präfix $(Ey)(x_1)(Ez)(Ex_0)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)$ (also der verlangten Form) bringen läßt, so ist damit Satz 39 bewiesen.

Zusatz bei der Korrektur (28. April 1936).

Es ist mir inzwischen gelungen, die in vorliegender Arbeit angegebenen Reduktionssätze des mengentheoretischen Entscheidungsproblems zu verschärfen und einige völlig neuen aufzustellen. Auch einige in I enthaltenen Sätze, wie 8, 9 und 10, haben sich verschärfen lassen. Die Verschärfungen der Sätze aus I stehen übrigens mit den der Sätze aus II in gewisser Beziehung, da die zweiten eben auf den ersten und auf einem völlig neuen Satz beruhen. Nach diesen Verschärfungen kann man ausnahmslos in allen Sätzen vom 22 bis 39 die Anzahl der einstelligen Funktionsvariablen (dort wo sie überhaupt bestimmt ist) um zwei vermindern. So zeigt z. B. die Verschärfung des Satzes 25, daß das Erfüllbarkeitsproblem für β-Ausdrücke mit Gödelschem Präfix und (außer R_1, R_2 und dem $=$-Zeichen, oder außer R_3 statt des $=$-Zeichens) mit einer einstelligen Funktionsvariable bereits dem allgemeinen Entscheidungsproblem äquivalent ist. Diese Resultate beabsichtige ich in einer demnächst erscheinenden Fortsetzung zu beweisen. Die in der Einleitung angekündigte Übertragung in den beweistheoretischen Kalkül wird später in einer besonderen Arbeit geschehen.

(Eingegangen am 23. März 1935.)

Über die reellen Nullstellen des Derivierten eines Polynoms mit reellen Koeffizienten.[1])

Von JULIUS V. SZ. NAGY in Szeged.

1. E. LAGUERRE[2]) hat den folgenden Satz gefunden:

Teilt man das Intervall zwischen zwei benachbarten Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit lauter reellen Nullstellen in n gleiche Teile, so kann das Derivierte $P'(x)$ im Innern der äußersten Teilintervalle nicht verschwinden.

Eine Verschärfung[3]) dieses Satzes ist der folgende Satz:

Sind $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_n$ die Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit lauter reellen Nullstellen, so hat das Derivierte $P(x)$ im Innern der Intervalle

$$\left(\alpha_k,\ \alpha_k + \frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{n-k+1}\right) \text{ und } \left(\alpha_{k+1} - \frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{k+1},\ \alpha_{k+1}\right) \qquad (a_k \neq a_{k+1})$$

keine Nullstelle.

P. MONTEL[4]) hat den Laguerreschen Satz auf folgende Weise verallgemeinert:

Sind α und $\beta (> \alpha)$ zwei reelle Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten, deren Intervall (α, β)

---

1) Die Resultate dieser Arbeit wurden am 15. April 1935 vor der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgetragen.

2) E. CESÀRO, Solution de la Question 1338, *Nouvelles Annales de Math.* (3), **4** (1885), S. 328—330; E. CESÀRO—G. KOWALEWSKI, *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung* (Leipzig, 1904), S. 431.

3) JULIUS V. SZ. NAGY, Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung,* **27** (1918), S. 37—43, insb. S. 40—41.

4) P. MONTEL, Sur les zéros des derivées des fonctions analytiques, *Bulletin de la Soc. Math. France,* **58** (1930), S. 105—126, insb. S. 119—120.

im Innern keinen Realteil der übrigen Nullstellen von $P(x)$ enthält, so hat das Derivierte $P'(x)$ keine Nullstelle im Innern der Intervalle

$$\left(\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right) \text{ und } \left(\beta-\frac{\beta-\alpha}{n},\ \beta\right).$$

Es gilt auch die folgende Verschärfung[5]) dieses Satzes:

Sind die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten nach der Größe ihrer Realteile geordnet und sind die Nullstellen α_k und $\alpha_{k+1} (> \alpha_k)$ reell, so kann das Derivierte $P'(x)$ im Innern der Intervalle

$$\left(\alpha_k,\ \alpha_k+\frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{n-k+1}\right) \text{ und } \left(\alpha_{k+1}-\frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{k+1},\ \alpha_{k+1}\right)$$

nicht verschwinden.

2. Wir werden hier die folgenden Verschärfungen dieser Sätze beweisen:

I. *Sind α und $\beta (> \alpha)$ zwei reelle Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten und liegt keine Nullstelle von $P(x)$ im Innern des Kreises K vom Durchmesser (α, β), so liegt keine Nullstelle von $P'(x)$ im Innern der Intervalle*

$$\left(\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right) \text{ und } \left(\beta-\frac{\beta-\alpha}{n},\ \beta\right).$$

II. *Ist α bzw. $\beta (> \alpha)$ eine m_1- bzw. m_2-fache reelle Nullstelle eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten, liegt ferner keine Nullstelle von $P(x)$ im Innern des Kreises K vom Durchmesser (α, β) und bedeutet endlich h bzw. k die Anzahl derjenigen Nullstellen von $P(x)$, deren Realteile größer als α bzw. kleiner als β sind, so liegt keine Nullstelle von $P'(x)$ im Innern der Intervalle*

$$\left(\alpha,\ \alpha_1=\alpha+m_1\frac{\beta-\alpha}{m_1+h}\right) \text{ und } \left(\beta_1=\beta-m_2\frac{\beta-\alpha}{m_2+k},\ \beta\right).$$

Wir beweisen nur den Satz II, weil er den Satz I in sich enthält.

Ist x eine im Innern des Intervalles (α, β) liegende Nullstelle von $P'(x)$, so läßt sich die Gleichung

---

[5]) Julius v. Sz. Nagy, Egy polinom deriváltja zéróhelyeinek helyzetéről (Über die Lage der Nullstellen der Derivierten eines Polynoms), *Matematikai és Fizikai Lapok*, **38** (1931), S. 41—60, insb. S. 54—55.

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{m_1}{x-\alpha} + \frac{m_2}{x-\beta} + \ldots = 0$$

in der Form

$$\frac{m_1}{x-\alpha} + \ldots = \frac{m_2}{\beta - x} + \ldots \tag{1}$$

schreiben, wo eine Nullstelle von $P(x)$ an der linken bzw. an der rechten Seite der Gleichung vorkommt, je nachdem ihr Realteil kleiner bzw. größer als x ist. Hat das Polynom auch solche Nullstellen, deren Realteile gleich x sind, so können die entsprechenden Glieder von (1) nach Belieben entweder an der linken, oder an der rechten Seite der Gleichung stehen.

Der Realteil eines Gliedes von (1), dessen Zähler Eins ist, bedeutet den reziproken Wert des Durchmessers vom Kreise K_γ, der durch den Punkt x und durch die betreffende Nullstelle γ von $P(x)$ hindurchgeht und dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt.

Ist nämlich $\gamma - x = re^{i\varphi}$, so ist

$$\frac{1}{\gamma - x} = \frac{\cos\varphi}{r} - i\frac{\sin\varphi}{r}. \tag{2}$$

Daraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

Der Kreis K_γ schneidet den Kreis K, weil der Punkt x im Innern von K, der Punkt γ aber außerhalb des Inneren von K liegt. Die Kreisfläche K_γ enthält den Punkt α oder den Punkt β, je nachdem $\Re(x-\gamma)$ bzw. $\Re(\gamma - x)$ positiv ist. Der Durchmesser D_γ des Kreises K_γ ist also im Falle $\Re(x-\gamma) > 0$ nicht kleiner als $x - \alpha$, im Falle $\Re(\gamma - x) > 0$ nicht kleiner als $\beta - x$.

Betrachtet man also die Realteile der Glieder von (1), so kann man aus der Gleichung (1) die Ungleichungen

$$\frac{m_1}{x-\alpha} \leqq \frac{h}{\beta - x} \quad \text{und} \quad \frac{m_2}{\beta - x} \leqq \frac{k}{x-\alpha} \tag{3}$$

folgern, die sich auch in der Form

$$x - \alpha \geqq m_1 \frac{\beta - \alpha}{m_1 + h} = \alpha_1 - \alpha \quad \text{und} \quad \beta - x \geqq m_2 \frac{\beta - \alpha}{m_2 + k} = \beta - \beta_1 \tag{4}$$

schreiben lassen. Durch diese Ungleichungen ist der Satz II bewiesen.

Hat das Polynom $P(x)$ h_1 bzw. k_1 solche Nullstellen, deren Realteile größer als α_1 bzw. kleiner als β_1 sind, so kann man aus der Gleichung (1) auch die Ungleichungen

$$(5)\qquad \frac{m_1}{x-\alpha} \leqq \frac{h_1}{\beta - x} \quad \text{und} \quad \frac{m_2}{\beta - x} \leqq \frac{k_1}{x-\alpha}$$

folgern, weil $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ ist.

Daraus folgt der folgende Zusatz des Satzes II:

Zusatz zu II. *Hat das Polynom $P(x)$ h_1 bzw. k_1 solche Nullstellen, deren Realteile größer als α_1 bzw. kleiner als β_1 sind und besteht mindestens eine der Ungleichungen $h_1 < h$ und $k_1 < k$, so hat das Polynom $P'(x)$ keine Nullstelle im Innern der Intervalle $\left(\alpha, \alpha_2 = \alpha + m_1 \frac{\beta-\alpha}{m_1+h_1}\right)$ und $\left(\beta_2 = \beta - m_2 \frac{\beta - \alpha}{m_2 + k_1}, \beta\right)$. Bezeichnet h_2 bzw. k_2 die entsprechende Zahl in bezug auf den Punkt α_2 bzw. β_2, wie h_1 bzw. k_1 in bezug auf α_1 bzw. β_1 und besteht mindestens eine der Ungleichungen $h_2 < h_1$ und $k_2 < k_1$, so enthält das Innere des Intervalles $\left(\alpha, \alpha_3 = \alpha + m_1 \frac{\beta-\alpha}{m_1+h_2}\right)$ oder $\left(\beta_3 = \beta - m_2 \frac{\beta-\alpha}{m_2+k_2}, \beta\right)$ keine Nullstelle von $P'(x)$.* (Dieses Verfahren läßt sich auch fortsetzen.)

3. Es gilt auch der folgende Satz:

III. *Ist $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, für welches α eine m_1-fache und $\beta (> \alpha)$ eine m_2-fache reelle Nullstelle ist, hat ferner $P(x)$ höchstens $h = m_2 + 2p$ bzw. $k = m_1 + 2q$ solche Nullstellen, deren Realteile größer als α bzw. kleiner als β sind, und liegt endlich keine Nullstelle von $P(x)$ im Innern des Kreiszweieckes Z, das aus den Kreisflächen K_1 und K_2 mit den Durchmessern*

$$\left(\alpha, \beta_1 = \beta - m_2 \frac{\beta-\alpha}{m_1+m_2+2q}\right) \text{ und } \left(\alpha_1 = \alpha + m_1 \frac{\beta - \alpha}{m_1+m_2+2p}, \beta\right)$$

besteht, so hat das Polynom $P'(x)$ keine Nullstelle im Innern der Intervalle (α, α_1) und (β_1, β).

Wir nehmen zum Beweis an, daß es ein Polynom $P_0(x)$ gibt, für welches die Bedingungen des Satzes III erfüllt sind, der Satz aber nicht besteht. $P_0'(x)$ hat also eine Nullstelle x_0 im Innern des Intervalles (α, α_1) oder (β_1, β). Wir nehmen an, daß x_0 im Intervall (α, α_1) liegt.

Während des Beweises verstehen wir unter einem Polynom $P(x)$ ein Polynom von den im Satze III genannten Eigenschaften, aber mit der einzigen Ausnahme, daß seine Multiplizität im Punkte β auch größer als m_2 sein kann.

Bezeichnet S_0 bzw. S die Summe der rechten Seite (die Summe der reellen Teile der Glieder) von (1) im Punkte x_0 in Bezug auf $P_0(x)$ bzw. $P(x)$, so besteht die Ungleichung

$$\frac{m_1}{x_0-\alpha} \leqq S_0. \tag{6}$$

Bezeichnen δ und $\bar{\delta}$ die Ecken des Kreiszweieckes Z, so werden wir durch die Veränderung der Nullstellen der Polynome $P(x)$ zeigen, daß die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{m_1}{x_0-\alpha} \leqq S \leqq \Re\left[\frac{p}{\delta-x_0}+\frac{p}{\bar{\delta}-x_0}\right]+\frac{m_2}{\beta-x_0} &= \\ = \frac{p}{\delta-x_0}+\frac{p}{\bar{\delta}-x_0}+\frac{m_2}{\beta-x_0}&\end{aligned} \tag{7}$$

für jedes Polynom $P(x)$ besteht.

Es ist klar, daß die Summe S vergrößert wird, wenn man diejenigen Nullstellen von $P_0(x)$, deren Realteile größer als x_0 sind, um den Punkt x_0 nach der positiven Richtung der reellen Achse so lange dreht, bis sie auf den Rand von Z oder auf die reelle Achse gelangen. Durch dieses Verfahren erhalten wir aus $P_0(x)$ ein Polynom $P_1(x)$ und aus S_0 eine Summe S_1.

Die Summe S_1 wird weiter vergrößert, wenn man die von x_0 rechts abliegenden reellen Nullstellen von $P_1(x)$ in den Punkt β zusammenzieht und dann jede Nullstelle γ, für welche $\alpha < \Re(\gamma) \leqq x_0$ ist, ausläßt, indem man das Polynom durch $x-\gamma$ dividiert. Hat das so erhaltene Polynom $P_2(x)$ $2p'-1+m_2$ solche Nullstellen, deren Realteile größer als α sind, so vergrößern wir die Multiplizität von β um Eins. Das so erhaltene Polynom bzw. die zugehörige Summe S wird mit $P_3(x)$ bzw. mit S_3 bezeichnet.

Die Ecken δ und $\bar{\delta}$ teilen den Rand von Z in zwei Stücke und zwar R_1 und R_2, von denen R_1 bzw. R_2 ein Bogen des Kreises K_1 bzw. K_2 ist. Nähert sich nun ein Punkt γ vom Punkte β ausgehend auf R_2 dem Punkte δ $(\bar{\delta})$, so nimmt der Durchmesser D_γ des Kreises K_γ, der durch die Punkte x_0 und γ hindurchgeht und dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt, monoton ab. Wäre nämlich diese Veränderung von D_γ nicht monoton, so gäbe es auf dem Teilbogen (β, δ) von R_2 zwei verschiedene Punkte γ_1 und γ_2, so daß $K_{\gamma_1} = K_{\gamma_2}$ wäre. Dann wäre aber der Kreis K_2

von K_{γ_1} in vier Punkten getroffen. Dies ist aber unmöglich, weil x_0 außerhalb von K_2 liegt und deshalb K_{γ_1} von K_2 verschieden ist. Die Veränderung von D_γ während der vorigen Bewegung von γ ist eine Abnahme, weil x_0 außerhalb der Kreisfläche K_2 liegt und deshalb $D_\gamma < \beta - x_0 = D_\beta$ ist.

Ist γ_0 derjenige Punkt des Teilbogens (α, δ) von R_1, dessen Realteil gleich x_0 ist, und nähert sich ein Punkt γ auf R_1 von γ_0 $(\bar{\gamma}_0)$ ausgehend dem Punkte δ $(\bar{\delta})$, so nimmt der Wert $\Re\left(\frac{1}{\gamma - x_0}\right)$ monoton zu, wie man dies leicht einsehen kann.

Daraus folgt, daß die Summe S_3 zunimmt, wenn man die auf R_1 und R_2 liegenden konjugiert imaginären p_1 Nullstellenpaare und $p' - p_1$ Paare von den in β zusammenfallenden $2(p' - p_1) + m_2$ Nullstellen von $P_3(x)$ in das Punktpaar $\delta, \bar{\delta}$ bringt. Das so erhaltene Polynom $P_4(x)$ hat in α, β bzw. δ und $\bar{\delta}$ eine m_1-fache, m_2-fache bzw. je eine p'-fache Nullstelle.

Damit ist die Ungleichung (7) bewiesen, weil $p' \leqq p$ ist.

Ist nun

$$P^*(x) = (x - \alpha)^{m_1} (x - \beta)^{m_2} [(x - \delta)(x - \bar{\delta})]^p, \tag{8}$$

und ist x_0^* die im Innern des Intervalles (α, β) liegende kleinste Nullstelle von $P^{*\prime}(x)$, so besteht die Gleichung

$$\frac{m_1}{x_0^* - \alpha} = \frac{p}{\delta - x_0^*} + \frac{p}{\bar{\delta} - x_0^*} + \frac{m_2}{\beta - x_0^*}. \tag{9}$$

Aus dem Vergleich dieser Gleichung mit der Ungleichung (7) folgt, daß $x_0 \geqq x_0^*$ ist.

Bedeutet c eine positive Zahl und sind

$$n = m_1 + m_2 + 2p, \quad \alpha = -m_1 c, \quad \beta = m_2 c, \tag{10}$$

so sind

$$\begin{gathered} \delta = ic\sqrt{2\frac{p}{n} m_1 m_2}, \quad \bar{\delta} = -ic\sqrt{2\frac{p}{n} m_1 m_2}, \\ \alpha_1 = \frac{-2p}{n} c m_1, \quad \beta_1 = \frac{2p}{n} c m_2 \end{gathered} \tag{11}$$

und

$$P^*(x) = (x + m_1 c)^{m_1} (x - m_2 c)^{m_2} \left(x^2 + 2c^2 \frac{p}{n} m_1 m_2\right)^p. \tag{12}$$

Das Derivierte dieses Polynoms $P^*(x)$ hat im Innern des Intervalles (α, β) die drei Nullstellen

$$(13) \qquad x_0^* = -\frac{2p}{n} c m_1 = \alpha_1, \quad x_1^* = 0 \quad \text{und} \quad x_2^* = \frac{2p}{n} c m_2 = \beta_1.$$

Daraus folgt, daß x_0 — gegen unserer Annahme — kein innerer Punkt des Intervalles (α, α_1) ist.

Ähnlicherweise kann man beweisen, daß $P_0(x)$ auch im Innern des Intervalles (β_1, β) keine Nullstelle haben kann. Damit ist der Satz III bewiesen. Auch dieser Satz läßt sich durch einen entsprechenden Zusatz ergänzen.

4. Von uns stammt der folgende Satz[6]:

Teilt man das Intervall zwischen der größten und kleinsten Nullstelle eines Polynomes $P(x)$ n-ten Grades mit lauter reellen Nullstellen in n gleiche Teile, so hat das Derivierte $P'(x)$ in den äußersten Teilintervalle mindestens je eine Nullstelle.

Für Polynome mit reellen Koeffizienten gilt der Satz:

IV. *Sind α und $\beta\,(>\alpha)$ reelle Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten und liegt keine andere Nullstelle von $P(x)$ außerhalb der Kreisfläche vom Durchmesser*

$$\left(\alpha_1 = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}, \beta\right) \quad \textit{bzw.} \quad \left(\alpha, \beta_1 = \beta - \frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

so enthält das abgeschlossene Intervall (α, α_1) bzw. (β_1, β) mindestens eine Nullstelle von $P'(x)$.

Dieser Satz ist eine Folgerung des folgenden allgemeineren Satzes:

V. *Sind α und $\beta\,(>\alpha)$ reelle Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ mit reellen Koeffizienten und hat der Punkt α_2 des Intervalles (α, β) die folgenden drei Eigenschaften: 1. das Polynom $P(x)$ hat mindestens h solche Nullstellen, deren Realteile größer als α_2 sind, und diese Nullstellen liegen alle im Innern oder am Rande des Kreises K_2 vom Durchmesser (α_2, β); 2. $P(x)$ hat höchstens k solche Nullstellen, deren Realteile kleiner als α_2 sind, und keine von diesen Nullstellen liegt im Innern des Kreises K_1 vom Durchmesser (α, α_2); 3. $\alpha_2 \geqq \alpha + k\dfrac{\beta-\alpha}{h+k}$; so enthält das Intervall (α, α_2) außerhalb des Endpunktes α mindestens eine Nullstelle des Polynoms $P'(x)$.*

Man kann im Falle der Erfüllung von entsprechenden Be-

---

[6]) J. v. Sz. Nagy, Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, **27** (1918), S. 37–43.

dingungen auch für die im Innern des Intervalles (α, β) liegende größte Nullstelle von $P'(x)$ einen Satz aussprechen.

Die Funktion

$$F(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \dots \tag{14}$$

nimmt in einem, dem Punkte α genügend nahe liegenden Punkte x_1 des Intervalles (α, β) offenbar einen positiven Wert an. Der Wert von $F(x)$ im Punkte α_2 ist die Summe der Realteile der Glieder an der rechten Seite von (14). Ist γ eine Nullstelle von $P(x)$ und bedeutet D_γ die Länge des Durchmessers vom Kreise K_γ, der durch die Punkte α_2 und γ hindurchgeht und dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt, so ist der Wert von $\Re\left(\frac{1}{\alpha_2-\gamma}\right)$ entweder $\frac{1}{D_\gamma}$, oder 0, oder $-\frac{1}{D_\gamma}$, je nachdem $\Re(\alpha_2-\gamma)$ positiv, Null oder negativ ist.

Aus den Annahmen des Satzes V folgt also, daß

$$F(\alpha_2) = \frac{P'(\alpha_2)}{P(\alpha_2)} \leqq \frac{k}{\alpha_2-\alpha} - \frac{h}{\beta-\alpha_2} \leqq 0$$

ist.

Die Funktion $F(x)$ nimmt also im Punkte x_1 bzw. α_2 einen positiven bzw. einen nichtpositiven Wert an. Sie hat nach den Annahmen des Satzes V im Intervall (x_1, α_2) keinen Pol. Daraus folgt, daß $F(x)$ und damit auch $P'(x)$ mindestens eine Nullstelle hat, für welche $\alpha < x \leqq \alpha_2$ ist.

Damit ist der Satz V bewiesen. Der Satz IV folgt aus V einfach.

5. Wir werden jetzt die folgende Verallgemeinerung des Satzes II beweisen:

VI. *Wir bezeichnen mit $\alpha = a + iA$ bzw. $\beta = b + iB$ $(a < b)$ eine m_1- bzw. m_2-fache Nullstelle eines Polynoms $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, mit h bzw. k die Anzahl der Nullstellen von $P(x)$, deren Realteile größer als a bzw. kleiner als b sind. Hat $P(x)$ keine Nullstelle im Innern des Kreises K vom Durchmesser (a, b) und bestehen die Ungleichungen*

$$|A| \leqq m_1 \frac{b-a}{m_1+h} = d_a \quad \text{und} \quad |B| \leqq m_2 \frac{b-a}{m_2+k} = d_b,$$

so verschwindet das Derivierte $P'(x)$ mindestens einmal auf der Strecke

$$\left(a_1 = a + d_a = a + m_1 \frac{b-a}{m_1+h},\ b_1 = b - d_b = b - m_2 \frac{b-a}{m_2+k}\right).$$

Ist $\alpha = a$ oder $\beta = b$, so kann $P'(x)$ im Innern der Strecke (a, a_1) bzw. (b_1, b) nicht verschwinden.

Ist

$$F(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{m_1}{x-\alpha} + \frac{m_2}{x-\beta} + \dots, \tag{15}$$

so beweisen wir die Richtigkeit der Ungleichungen

$$F(a_1) \geqq 0 \quad \text{und} \quad F(b_1) \leqq 0. \tag{16}$$

Im Falle $A \neq 0$ ist

$$\frac{m_1}{a_1-\alpha} + \frac{m_1}{a_1-\bar{\alpha}} = \frac{2m_1(a_1-a)}{(a_1-a)^2+A^2} \geqq \frac{2m_1(a_1-a)}{(a_1-a)^2+(a_1-a)^2} = \frac{m_1}{a_1-a}.$$

Aus der Lage der Nullstellen von $P(x)$ in beiden Fällen $A \neq 0$ und $A = 0$ folgt also die Ungleichung

$$F(a_1) \geqq \frac{m_1}{a_1-a} - \frac{h}{b-a_1} = 0,$$

weil höchstens h Glieder der rechten Seite von (15) negative Realteile haben können und weil der absolute Betrag dieser Realteile höchstens $\frac{1}{b-a_1}$ ist.

Auf ähnliche Weise kann man einsehen, daß die Ungleichung

$$F(b_1) \leqq \frac{k}{b_1-a} - \frac{m_2}{b-b_1} = 0$$

in beiden Fällen $B \neq 0$ und $B = 0$ besteht. Damit sind die Ungleichungen (16) bewiesen. Daraus folgt, daß $P'(x)$ auf der Strecke (a_1, b_1) mindestens einmal verschwindet.

Ist a_2 bzw. b_2 ein innerer Punkt des Intervalles (a, a_1) bzw. (b_1, b), so kann man im Falle $A = 0$ bzw. $B = 0$ die Ungleichung

$$F(a_2) \geqq \frac{m_1}{a_2-a} - \frac{h}{b-a_2} > \frac{m_1}{a_1-a} - \frac{h}{b-a_1} = 0$$

bzw.

$$F(b_2) \leqq \frac{k}{b_2-a} - \frac{m}{b-b_2} < \frac{k}{b_1-a} - \frac{m}{b-b_1} = 0$$

leicht einsehen. Das Derivierte $P'(x)$ hat also im Falle $A = 0$ bzw. $B = 0$ keine Nullstelle im Innern des Intervalles (a, a_1) bzw. (b_1, b).

Damit ist der Satz VI vollständig bewiesen.

Aus diesem Satz folgt diese Verallgemeinerung des Laguerreschen Satzes:

VII. *Sind $\alpha = a + iA$ und $\beta = b + iB$ zwei solche Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten, für welche die Ungleichungen*

$$a < b, \ |A| \leqq \frac{b-a}{n} \quad \text{und} \quad |B| \leqq \frac{b-a}{n}$$

bestehen, und liegt keine Nullstelle von $P(x)$ im Innern des Kreises mit dem Durchmesser (a, b), so verschwindet das Derivierte $P'(x)$ mindestens einmal auf der Strecke

$$\left(a_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ b_1 = b - \frac{b-a}{n}\right).$$

Im Falle $A = 0$ bzw. $B = 0$ kann $P'(x)$ im Innern der Strecke (a, a_1) bzw. (b_1, b) nicht verschwinden.

Aus dem Beweis des Satzes VI folgt der Satz:

VIII. *Sind $\alpha = a + iA$, $\beta = b + iB$, $\gamma = c + iC$ und $\delta = d + iD$ $(a < b \leqq c < d)$ solche Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, für welches der Satz VI in den Intervallen (a, b) und (c, d) anwendbar ist, und hat das Polynom im abgeschlossenen Intervall (b, c) entweder keine Nullstelle, oder mindestens zwei Nullstellen, so hat das Derivierte $P'(x)$ mindestens drei Nullstellen im Intervall (a, d). Dieser Satz besteht auch dann, wenn β und γ dieselbe Nullstelle von $P(x)$ bedeutet.*

Mit entsprechender Bezeichnung sind nämlich

$$F(a_1) \geqq 0, \ F(b_1) \leqq 0, \ F(c_1) \geqq 0 \ \text{und} \ F(d_1) \leqq 0.$$

Daraus folgt, daß $P'(x)$ auf den Strecken (a_1, b_1) und (c_1, d_1) mindestens je eine Nullstelle hat. Hat also das Polynom $P(x)$ auf der Strecke (b, c) mindestens zwei Nullstellen, so enthält das Intervall (a, d) mindestens drei Nullstellen von $P'(x)$. Hat das Polynom $P(x)$ keine Nullstelle im abgeschlossenen Intervall (b, c), so ist die Funktion $F(x)$ im Innern des Intervalles (a, d) eine stetige Funktion. Ist a_2 bzw. d_2 ein dem Punkte a_1 bzw. d_1 genügend nahe liegender Punkt der Strecke (a, a_1) bzw. (d_1, d), so ist $F(a_2) > 0$ und $F(d_2) < 0$. Daraus folgt, daß die stetige Funktionen $F(x)$ und $P'(x)$ im Intervall (a_2, d_2) mindestens drei Nullstellen haben. Damit ist der Satz VIII bewiesen.

Man kann auf Grund dieses Satzes verschiedene Polynome $P(x)$ mit reellen Koeffizienten und von folgenden drei Eigenschaften herstellen: 1. das Polynom $P(x)$ kann beliebig viele nichtreelle Nullstellen haben, 2. das Derivierte $P'(x)$ hat lauter reelle Nullstellen, die alle voneinander verschieden sind, 3. die Realteile von je zwei nicht konjugiert imaginären Nullstellen des Polynoms $P(x)$ sind durch mindestens eine Nullstelle von $P'(x)$ getrennt.

(Eingegangen am 23. April 1935.)

Über lakunäre trigonometrische Reihen.

Von S. SIDON in Budapest.

Frühere Arbeiten[1]) enthalten den

Satz I. *Ist $n_1, \ldots, n_k \ldots$ eine Folge positiver ganzer Zahlen von der Beschaffenheit, daß die Folge der Koeffizienten der Potenzreihe* $\left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{n_k}\right)^{\frac{p}{2}}$, *wo $p>2$ eine gerade ganze Zahl bedeutet, beschränkt ist, so gehört jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$ zur Klasse L_p.*

Für ein ungerades ganzes $p>1$ gilt

Satz II. *Besitzt die Folge positiver ganzer Zahlen $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Eigenschaft, daß wenn $p_1+p_2=p$, stets $\sum_{k=1}^{p_1} n_{i_k} \neq \sum_{l=1}^{p_2} n_{j_l}$, so gehört jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare, einseitig beschränkte Funktion*[2]) $f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos n_i x + b_i \sin n_i x)$ *zur Klasse L_p.*

Dieser Satz ergibt sich durch Kombination der Ungleichungen

$$1) \qquad \frac{\left[\int_a^b [\varphi(x)]^{t_1} dx\right]^l}{\int_a^b [\varphi(x)]^{l t_2} dx} > \frac{\left[\int_a^b [\varphi(x)]^{t_2} dx\right]^l}{\int_a^b [\varphi(x)]^{l t_1} dx},$$

[1]) Meine Noten: I. Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **163** (1930), S. 251—252; II. Ein Satz über Fouriersche Reihen mit Lücken, *Math. Zeitschrift*, **34** (1932), S. 481—484; III. Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen, *diese Acta*, **7** (1934—35), S. 85—94; IV. Über die Fourier-Konstanten der Funktionen der Klasse L_p für $p>1$, *diese Acta*, **7** (1934—35), S. 175—176.

[2]) Beim Beweise des Satzes II setzen wir $f(x)$ nach unten beschränkt voraus.

wo $\varphi(x)$ eine im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetige, nichtnegative Funktion, $t_2 > t_1 > 0$, $l > 1$ ist[3]) und

$$2)\qquad \left|\int_0^{2\pi} [T_k(x)]^p\, dx\right| < C\left[\int_0^{2\pi} [T_k(x)]^{p-1}\, dx\right]^{\frac{p}{p-1}},$$

wo $T_k(x)$ ein beliebiges trigonometrisches Polynom von der Form $a + \sum_{i=1}^{k} (a_i \cos n_i x + b_i \sin n_i x)$ bedeutet und die positive Konstante C von $T_k(x)$ unabhängig ist,

wenn $\varphi(x) = T_k(x) = S_{n_k}(x) - m$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $t_1 = 1$, $l = \frac{p}{p-1}$,

für t_2 der Reihe nach $\frac{p}{p-1}, \left(\frac{p}{p-1}\right)^2, \ldots, \left(\frac{p}{p-1}\right)^h$, $p-1$, wo $\left(\frac{p}{p-1}\right)^h < p-1 < \left(\frac{p}{p-1}\right)^{h+1}$, gesetzt wird; hierbei bedeutet $S_n(x)$ das n-te arithmetische Mittel der Fourier-Reihe von $f(x)$, m das Minimum von $f(x)$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

Satz I und II lassen sich unmittelbar auf fastperiodische Fourier-Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x)$, wo $\lambda_n > 0$, übertragen.[4])

(Eingegangen am 12. Juni 1935.)

---

[3]) Diese Ungleichung läßt sich ebenso beweisen, wie der Spezialfall $l = 2$ loc. cit. [1]), II.

[4]) Im Beweise treten dann an Stelle der arithmetischen Mittel der Fourier-Reihe von $f(x)$ ihre Bochnerschen Summierungspolynome. Für den Fall $l = 4$ ist die in Rede stehende Verallgemeinerung für Satz I schon in meiner Note: Verallgemeinerung der in meiner Arbeit „Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen" bewiesenen Sätze, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **166** (1932), S. 62—63 enthalten. Ein Spezialfall des dort ausgesprochenen Satzes wurde auch von den Herren BOCHNER und JESSEN gefunden: Distribution Functions and Positive Definite Functions, *Annals of Math.*, **35** (1934), S. 252—257.

Une loi-limite du calcul des probabilités.

Par E. FELDHEIM à Budapest.

1. Désignons par p la probabilité constante d'un évènement fortuit E, et soit m la répétition de l'évènement E au cours de n épreuves (c'est-à-dire le nombre de ces épreuves où E s'est produit). On fait $q = 1 - p$.

La loi-limite de LAPLACE dit que la probabilité de l'inégalité

$$t_1 < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < t_2$$

tend, pour $n \to \infty$, vers

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \tag{1}$$

où t_1 et $t_2 \geqq t_1$ sont deux nombres réels arbitraires.

M. KHINTCHINE a fait l'étude du cas où t_1 et t_2 deviennent infiniment grands en même temps, et il a trouvé le théorème suivant :[1])

Si l'on pose $t_1 = t + \frac{g_1}{t}$, $t_2 = t + \frac{g_2}{t}$, où $0 \leqq g_1 \leqq g_2 \leqq +\infty$, on aura à la limite

$$\frac{P(t_1, t_2)}{P(t, \infty)} = e^{-g_1} - e^{-g_2}, \tag{2}$$

pour $t \to \infty$, $t = o(\sqrt{n})$.

Nous donnerons d'abord une démonstration élémentaire mais non rigoureuse de ce théorème.

---

[1]) A. KHINTCHINE, Über einen neuen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math Annalen*, **101** (1929), p. 745—752.

Si $t \to \infty$, le rapport

$$\frac{P(t_1, t_2)}{P(t, \infty)} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}{\int_t^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz} = \frac{\int_{t+\frac{g_1}{t}}^{t+\frac{g_2}{t}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}{\int_t^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz}$$

n'a aucun sens. On peut appliquer la règle de L'HÔPITAL :

$$\left.\frac{P(t_1, t_2)}{P(t, \infty)}\right|_{t=\infty} = \left.\frac{\left(1-\frac{g_2}{t^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(t+\frac{g_2}{t}\right)^2} - \left(1-\frac{g_1}{t^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(t+\frac{g_1}{t}\right)^2}}{-e^{-\frac{t^2}{2}}}\right|_{t=\infty} =$$

$$= \left[\left(1-\frac{g_1}{t^2}\right) e^{-g_1} . e^{-\frac{g_1^2}{2t^2}} - \left(1-\frac{g_2}{t^2}\right) e^{-g_2} . e^{-\frac{g_2}{2t^2}}\right]_{t=\infty} =$$

$$= \left[e^{-g_1}\left[1+O\left(\frac{g_1}{t^2}\right)\right] - e^{-g_2}\left[1+O\left(\frac{g_1}{t^2}\right)\right]\right]_{t=\infty} = e^{-g_1} - e^{-g_2}.$$

2. Nous donnerons une généralisation de ce théorème au cas des „tirages contagieux" de M. PÓLYA.

Avant de formuler notre théorème, considérons le cas suivant, analogue à celui de M. KHINTCHINE. Soit $P(t)$ la probabilité pour qu'un certain écart absolu fortuit X surpasse un nombre positif t. On suppose que

$$P(t) = A \int_t^\infty e^{-\lambda x^r} dx, \tag{3}$$

où A, λ, r sont certaines constantes positives.

Pour déterminer ces constantes, observons que $P(0) = 1$, c'est-à-dire

$$A \int_0^\infty e^{-\lambda x^r} dx = 1$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{r \lambda^{\frac{1}{r}}}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)},$$

$\Gamma(x)$ étant l'intégrale eulérienne de seconde espèce.

Pour calculer λ, appelons μ le moment d'ordre r de l'écart x,

$$\mu = A\int_0^\infty x^r e^{-\lambda x^r}\,dx = \frac{1}{\lambda r},$$

donc

$$A = \frac{r^{1-\frac{1}{r}}}{\mu^{\frac{1}{r}}\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}, \quad \lambda = \frac{1}{\mu r}. \tag{4}$$

La probabilité de l'inégalité $t_1 \leqq x \leqq t_2$ sera alors

$$P(t_1, t_2) = A\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{\mu r}x^r}\,dx. \tag{4'}$$

Examinons le cas où t_1 et t_2 tendent vers l'infini tous les deux, en posant

$$t_1 = t + \frac{a}{t^{r-1}}, \quad t_2 = t + \frac{b}{t^{r-1}} \qquad (r > 1,\ 0 < a < b),$$

$$P(t_1, t_2) = A\int_{t+\frac{a}{t^{r-1}}}^{t+\frac{b}{t^{r-1}}} e^{-\frac{1}{\mu r}x^r}\,dx = \frac{A}{t^{r-1}}\int_a^b e^{-\frac{1}{\mu r}\left(t+\frac{y}{t^{r-1}}\right)^r}\,dy =$$

$$= \frac{Ae^{-\frac{t^r}{\mu r}}}{t^{r-1}}\int_a^b e^{-\frac{y}{\mu}}dy\left\{1+O\left(\frac{1}{t^r}\right)\right\} = \{1+O(1)\}\left(e^{-\frac{a}{\mu}} - e^{-\frac{b}{\mu}}\right)\frac{A\mu e^{-\frac{t^r}{\mu r}}}{t^{r-1}} =$$

$$= \{1+O(1)\}\left(e^{-\frac{a}{\mu}} - e^{-\frac{b}{\mu}}\right)\frac{(\mu r)^{1-\frac{1}{r}}e^{-\frac{t^r}{\mu r}}}{t^{r-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

De même,

$$P(t) = A\int_t^\infty e^{-\frac{1}{\mu r}x^r}\,dx = \frac{A}{t^{r-1}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{\mu r}\left(t+\frac{y}{t^{r-1}}\right)^r}\,dy,$$

$$P(t) = \frac{Ae^{-\frac{t^r}{\mu r}}}{t^{r-1}}\int_0^\infty e^{-\frac{y}{\mu}}dy\left\{1+O\left(\frac{1}{t^r}\right)\right\} = \{1+O(1)\}\frac{(\mu r)^{1-\frac{1}{r}}e^{-\frac{t^r}{\mu r}}}{t^{r-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)},$$

donc

$$\lim_{t\to\infty}\frac{P(t_1,\,t_2)}{P(t)}=e^{-\frac{a}{\mu}}-e^{-\frac{b}{\mu}}. \tag{5}$$

3. Considérons une urne contenant des boules blanches et noires, sa composition avant tout tirage étant donnée par p et q. La méthode des „tirages contagieux" consiste non seulement en remettant la boule tirée, mais en mettant encore dans l'urne un nombre déterminé de boules de la même espèce. Supposons par exemple, qu'on met un multiple γ du nombre total des boules. Ce nombre γ sera appelé „facteur de contagion".

La probabilité de tirer m boules blanches dans n épreuves sera donnée par la formule

$$P_m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\cdot\frac{p(p+\gamma)\ldots[p+(m-1)\gamma]\,q\,(q+\gamma)\ldots[q+(n-m-1)\gamma]}{1\,(1+\gamma)\ldots[1+(n-1)\gamma]}. \tag{6}$$

On peut mettre cette expression sous la forme plus condensée:

$$P_m=\frac{n}{m(n-m)}\,\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n-m)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\gamma}+m\right)\Gamma\left(\frac{q}{\gamma}+n-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+n\right)\Gamma\left(\frac{p}{\gamma}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\gamma}\right)}. \tag{7}$$

Nous démontrerons le théorème suivant:

Si m désigne la répétition des boules blanches dans les tirages contagieux de PÓLYA, le facteur de contagion étant γ, le quotient des probabilités des deux inégalités

$$\frac{n\gamma}{\mu r}\left(t+\frac{a}{t^{r-1}}\right)^r<m<\frac{n\gamma}{\mu r}\left(t+\frac{b}{t^{r-1}}\right)^r \qquad \begin{matrix}(0<a<b)\\(r>1)\end{matrix}$$

et

$$\frac{n\gamma}{\mu r}\,t^r<m<\infty$$

tend vers

$$e^{-\frac{a}{\mu}}-e^{-\frac{b}{\mu}}$$

si $p=\frac{\gamma}{r}$, n et t tendant vers l'infini, et γ tendant vers 0. Le nombre μ désigne la valeur probable de la variable

$$x = \frac{\mu r}{n\gamma} m.$$

a) Cherchons la limite vers laquelle tend la probabilité P_m, lorsque n augmentant indéfiniment, p et γ tendent vers 0 de sorte que $\frac{p}{\gamma}$ conserve une valeur finie $\frac{1}{r}$ et $n\gamma$ tend vers l'infini.

Posons alors

$$m = n\gamma\lambda x = \frac{n\gamma}{\mu r} x.$$

P_m prendra la forme suivante:

$$P_m = \frac{n}{\frac{n\gamma x}{\mu r} n\left(1-\frac{\gamma x}{\mu r}\right)} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{\gamma}\right)} \cdot$$
$$\cdot \frac{\Gamma\left(n\frac{\gamma x}{\mu r}+\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(n\frac{\gamma x}{\mu r}\right)} \frac{\Gamma\left[n\left(1-\frac{\gamma x}{\mu r}\right)+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r}\right]}{\Gamma\left[n\left(1-\frac{\gamma x}{\mu r}\right)\right]} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r}\right)}.$$

En employant l'expression asymptotique de $\Gamma(u)$, on trouve, pour $n \to \infty$,

$$\frac{\Gamma(An+\alpha)}{\Gamma(An+\beta)} = \frac{(An+\alpha)^{An+\alpha-\frac{1}{2}} e^{-An-\alpha}\sqrt{2\pi}\{1+O(1)\}}{(An+\beta)^{An+\beta-\frac{1}{2}} e^{-An-\beta}\sqrt{2\pi}\{1+O(1)\}},$$

alors

$$\frac{\Gamma(An+\alpha)}{\Gamma(An+\beta)} = (An)^{\alpha-\beta}\{1+O(1)\}. \tag{8}$$

On obtient alors pour P_m:

$$P_m = \frac{\mu r}{\gamma n} \frac{1}{(\mu r)^{\frac{1}{r}} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \frac{\gamma^{\frac{1}{r}} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r}\right)} x^{\frac{1}{r}-1}\left(1-\frac{\gamma x}{\mu r}\right)^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r}-1} \{1+O(1)\}. \tag{9}$$

Si $\gamma \to 0$, $\frac{1}{\gamma} \to \infty$,

$$\frac{\gamma^{\frac{1}{r}} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r}\right)} = 1 + O(\gamma),$$

$$\left(1-\frac{\gamma x}{\mu r}\right)^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r}-1} = e^{-f_\gamma(x)+O(\gamma)},$$

avec

$$f_\gamma(x)=\frac{1}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\left(\frac{\gamma x}{\mu r}\right)^{k+1}.$$

Donc

$$P_m=\frac{\mu r}{\gamma n}\,\frac{1}{(\mu r)^{\frac{1}{r}}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}\,x^{\frac{1}{r}-1}\,e^{-f_\gamma(x)+O(\gamma)}. \tag{10}$$

b) Donnons encore une autre méthode pour trouver la limite de la probabilité P_m, en faisant usage de la notion de fonction caractéristique. Cette méthode conduit à un résultat équivalent à celui du calcul direct, et, dans un grand nombre de cas, est plus rapide, et plus simple.

La fonction caractéristique est définie comme la valeur probable de la quantité e^{itx}, où t est un paramètre, donc, dans le cas des lois continues, cette fonction est

$$\varphi(t)=\int_0^{\infty} e^{itx}\,dF(x)=E(e^{itx}), \tag{11}$$

en supposant que la variable aléatoire prend toute valeur entre 0 et ∞. Pour les lois absolument continues, de densité $f(x)$, on a

$$\varphi(t)=\int_0^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx. \tag{12}$$

Dans notre cas, qui est celui des probabilités discontinues,

$$\varphi(t)=\sum_{m=0}^{n} e^{itm}P_m. \tag{13}$$

Cette fonction caractéristique est un polynome de degré n en $u=e^{it}$, on peut donc la développer suivant les puissances de

$$v=e^{it}-1=u-1.$$

On aura

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v^k}{k!}[M_k]=\Phi(v), \tag{14}$$

M_k étant les moments factoriels:

$$[M_k]=E[m(m-1)\dots(m-k+1)]. \tag{15}$$

Dans le cas des tirages contagieux,

$$[M_k]=n(n-1)\dots(n-k+1)\frac{p(p+\gamma)\dots[p+(k-1)\gamma]}{1(1+\gamma)\dots[1+(k-1)\gamma]} \tag{16}$$

et

$$\Phi(v) = \sum_{k=0}^{n} v^k C_n^k \frac{\frac{p}{\gamma}\left(\frac{p}{\gamma}+1\right)\dots\left(\frac{p}{\gamma}+k-1\right)}{\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\dots\left(\frac{1}{\gamma}+k-1\right)},$$

ou

$$(17) \qquad \Phi(v) = \sum_{k=0}^{n} v^k C_n^k \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\gamma}+k\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\gamma}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+k\right)}.$$

Si l'on introduit l'intégrale eulérienne de première espèce,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

on aura, comme il est facile à voir,

$$(18) \qquad \Phi(v) = \frac{1}{B\left(\frac{p}{\gamma}, \frac{q}{\gamma}\right)} \int_0^1 x^{\frac{p}{\gamma}-1}(1-x)^{\frac{q}{\gamma}-1}(1+vx)^n\,dx.$$

Dans notre cas,

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{1}{r}, \quad \frac{q}{\gamma} = \frac{1-p}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{r}.$$

Si l'on écrit encore

$$\frac{\gamma x}{\mu r} = \xi$$

on retrouve le calcul fait en *a)*.

Remarquons que si $n \to \infty$,

$$(1+vx)^n = \left[1 + \left(e^{it\frac{\mu r}{n\gamma}} - 1\right)\frac{\gamma\xi}{\mu r}\right]^n \to e^{it\xi},$$

donc

$$(19) \qquad \Phi(v) \to \frac{1}{(\mu r)^{\frac{1}{r}}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \int_0^{\frac{\mu r}{\gamma}} \xi^{\frac{1}{r}-1} e^{-f_\gamma(\xi)+O(\gamma)} e^{it\xi}\,d\xi.$$

Faisons encore tendre γ vers 0, $\frac{1}{\gamma} \to \infty$, $f_\gamma(\xi) \to \frac{\xi}{\mu r} = f_0(\xi)$, et

$$(20) \qquad \lim \Phi(v) = \int_0^1 \frac{1}{(\mu r)^{\frac{1}{r}}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \xi^{\frac{1}{r}-1} e^{-f_0(\xi)} e^{it\xi}\,d\xi.$$

En tenant compte de la formule (12) on voit donc que $\varphi(t)$ tend vers la fonction caractéristique de la loi dont la densité a pour expression

$$\frac{1}{(\mu r)^{\frac{1}{r}}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}\xi^{\frac{1}{r}-1}e^{-f_0(\xi)} \tag{21}$$

et c'est ainsi la densité de la loi-limite de P_m.

Si

$$x=\left(t+\frac{g}{t^{r-1}}\right)^r,$$

on aura

$$f_\gamma(x)=f_\gamma(t^r)+\frac{g}{\mu}+O\left(\frac{1}{t}\right)$$

et

$$x^{\frac{1}{r}-1}=t^{1-r}\left\{1+O\left(\frac{1}{t^{2r-1}}\right)\right\},$$

c'est-à-dire

$$P_m=\frac{\mu r}{\gamma n}\frac{e^{-f_\gamma(t^r)+O(\gamma)+O\left(\frac{1}{t}\right)}}{(\mu r)^{\frac{1}{r}}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)t^{r-1}}e^{-\frac{g}{\mu}}\left\{1+O\left(\frac{1}{t^{2r-1}}\right)\right\}. \tag{22}$$

La probabilité de l'inégalité

$$\frac{n\gamma}{\mu r}\left(t+\frac{a}{t^{r-1}}\right)^r<m<\frac{n\gamma}{\mu r}\left(t+\frac{b}{t^{r-1}}\right)^r$$

s'exprime alors par

$$P(t_1, t_2)=\sum_{\frac{n\gamma}{\mu r}\left(t+\frac{a}{t^{r-1}}\right)^r<m<\frac{n\gamma}{\mu r}\left(t+\frac{b}{t^{r-1}}\right)^r}P_m=$$

$$=\frac{\mu r}{n\gamma}\frac{e^{-f_\gamma(t^r)+O(\gamma)+O\left(\frac{1}{t}\right)}}{(\mu r)^{\frac{1}{r}}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)t^{r-1}}\left\{1+O\left(\frac{1}{t^{2r-1}}\right)\right\}\sum_{g=a}^{b}e^{-\frac{g}{\mu}}.$$

Si l'on remplace m par $m+1$, on peut admettre, en première approximation, que g augmente de $\frac{\mu}{n\gamma}$, donc

$$\sum_{g=a}^{b}e^{-\frac{g}{\mu}}=\frac{n\gamma}{\mu}\int_a^b e^{-\frac{s}{\mu}}ds=\frac{n\gamma}{\mu r}\mu r\left(e^{-\frac{a}{\mu}}-e^{-\frac{b}{\mu}}\right).$$

Nous avons enfin

$$(23)\qquad P(t_1, t_2) = \frac{e^{-f_\gamma(t^r)}}{t^{r-1}} \frac{(\mu r)^{1-\frac{1}{r}}}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \left(e^{-\frac{a}{\mu}} - e^{-\frac{b}{\mu}}\right)\{1 + O(1)\}.$$

On voit l'analogie entre ce problème et celui traité dans **2.** Un changement de variable opéré sur (9) permettrait d'ailleurs de trouver l'expression (4').

La formule (23) reste valable pour $a = 0$, $b = +\infty$, comme on le montre d'une façon tout-à-fait analogue à celle de M. KHINTCHINE. Donc

$$(24)\qquad P(t) = \frac{e^{-f_\gamma(t^r)}}{t^{r-1}} \frac{(\mu r)^{1-\frac{1}{r}}}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \{1 + O(1)\},$$

et alors

$$(25)\qquad \frac{P(t_1, t_2)}{P(t)} = e^{-\frac{a}{\mu}} - e^{-\frac{b}{\mu}}.$$

Il faut encore voir la signification de μ.

Il est facile à montrer que

$$E(m) = \sum_{m=0}^{n} m P_m = np = \frac{n\gamma}{r},$$

donc

$$\mu = E\left(\frac{\mu r}{n\gamma} m\right) = E(x).$$

Le résultat de ce problème particulier n'est donc pas essentiellement différent de celui obtenu pour la loi de LAPLACE, si on fait les recherches au même point de vue.

(Reçu le 26 juillet 1935)

Bemerkungen zum Hensel—Oreschen Hauptsatze.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

Es sei α eine primitive ganze Zahl des algebraischen Zahlkörpers $K = R(\alpha)$, welche der irreduziblen ganzzahligen Gleichung $F(x) = 0$ genügt. Die rationale Zahl p sei prim und es sei $F(x)$ (mod. p^ν) in irreduzible Faktoren, deren höchste Koeffizienten gleich Eins sind, zerlegt

(1) $$F(x) \equiv F_1(x) \ldots F_k(x) \ldots F_r(x) \qquad (\text{mod. } p^\nu).$$

Wir setzen voraus, daß $\nu \geqq \delta + 1$ ist, wo p^δ die höchste Potenz von p ist, die in der Diskriminante $D(F(x))$ enthalten ist. Im Körper K gilt

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{e_k} \ldots \mathfrak{p}_r^{e_r},$$

wo $\mathfrak{p}_k$ ein Primideal g_k-ten Grades bedeutet. Gehört $\mathfrak{p}_k$ im Sinne von ORE[1]) zum Polynom $F_k(x)$, dann wird der Grad des Polynoms

(1*) $$n_k = e_k g_k,$$

wenn, wie vorausgesetzt, $\nu \geqq \delta + 1$ ausfällt.

Es seien p^{δ_k}, bzw. $p^{\varrho_{kl}}$, $(k \neq l)$ die höchsten Potenzen von p, welche in $D(F_k(x))$, bzw. in der Resultante $R(F_k(x), F_l(x))$ enthalten sind. Führen wir die Körper $K^{(k)} = R(\overline{\alpha}_k)$ ein, wo

$$F_k(\overline{\alpha}_k) = 0$$

ist und es sollen die Indexe der Zahlen α, bzw. $\overline{\alpha}_k$ bezüglich der Körper K, bzw. $K^{(k)}$ die höchsten Potenzen p^ψ, bzw. $p^{\overline{\psi}_k}$ enthalten. ORE[2]) bewies, daß, für genügend große ν, die Relation

---

[1]) Ö. ORE, Über den Zusammenhang zwischen den definierenden Gleichungen und der Idealtheorie in algebraischen Körpern, *Math. Annalen*, **96** (1927), S. 313—352, insb. S. 326.

[2]) A. a. O. [1]), S. 345 (Satz 6).

$$(2) \qquad \psi = \sum_{k=1}^{r} \overline{\psi}_k + \sum_{k>l} \varrho_{kl}$$

gilt, worin die Zahlen δ_k, $\overline{\psi}_k$, ϱ_{kl} invariant sind.

Es läßt sich beweisen, daß (2) schon für $\nu \geqq \delta + 1$ richtig ist. Bei jeder Zerlegung (1) sind im Falle $\nu \geqq \delta + 1$ die Zahlen δ_k, $\overline{\psi}_k$, ϱ_{kl} dieselben. Es treten noch andere invariante Zahlen auf.

1. Zunächst wird die Invarianz der Zahlen δ_k, ϱ_{kl} bewiesen. Ist $\nu \geqq \delta + 1$, dann besteht für zwei beliebige Zerlegungen von $F(x)$ (mod. p^ν) in irreduzible Faktoren, deren höchste Koeffizienten gleich Eins sind,

$$(3) \qquad \begin{aligned} F(x) &\equiv F_1(x) \ldots F_k(x) \ldots F_r(x) \quad (\text{mod. } p^\nu) \\ F(x) &\equiv G_1(x) \ldots G_k(x) \ldots G_r(x) \quad (\text{mod. } p^\nu), \end{aligned}$$

nach ORE[3]) die Kongruenz

$$(3^*) \qquad F_k(x) \equiv G_k(x) \quad (\text{mod. } p^{\nu-\delta}),$$

wenn die Polynome $F_k(x)$, $G_k(x)$ zum Primideal $\mathfrak{p}_k$ gehören. Aus der bekannten Relation

$$(4) \qquad \delta = \sum_{k=1}^{r} \delta_k + 2 \sum_{k>l} \varrho_{kl}$$

folgt, daß $D(F_k(x))$, $D(G_k(x))$ bzw. $R(F_k(x), F_l(x))$, $R(G_k(x), G_l(x))$ im Falle $\nu \geqq 2\delta + 1$ dieselben höchsten Potenzen von p enthalten. Jetzt läßt sich unsere Behauptung für $\nu \geqq \delta + 1$ beweisen. Ist nämlich

$$F(x) \equiv F_1(x) \ldots F_k(x) \ldots F_r(x) \quad (\text{mod. } p^\nu),$$

so kann man (mod. $p^{\nu+\mu}$) eine Zerlegung in irreduzible Faktoren, deren höchste Koeffizienten gleich Eins sind,

$$F(x) \equiv F_1^{(\mu)}(x) \ldots F_k^{(\mu)}(x) \ldots F_r^{(\mu)}(x) \quad (\text{mod. } p^{\nu+\mu}),$$
$$\mu = 0, 1, 2, \ldots, \quad F_k^{(0)}(x) = F_k(x)$$

angeben, wo

$$(1^{**}) \qquad F_k^{(\mu)}(x) \equiv F_k(x) \quad (\text{mod. } p^{\nu-\varrho'}), \quad \varrho' = \sum_{k>l} \varrho_k$$

ausfallen. Ist nun $\nu \geqq \delta + 1$, so wird

$$\nu - \varrho' \geqq \sum_{k=1}^{r} \delta_k + \varrho' + 1,$$

woraus unsere Behauptung folgt. (Hier haben wir die Theorie der p-adischen Zahlen bewußt vermieden.)

[3]) A. a. O. [1]), S. 332.

2. Komplizierter ist der Beweis der Invarianz der Zahlen $\overline{\psi}_k$. Wir werden die p-adischen Zahlen verwenden.[4]) Es sei in irreduzible p-adische Faktoren, deren höchste Koeffizienten gleich Eins sind, zerlegt

$$F(x) = P_1(x) \dots P_k(x) \dots P_r(x) \quad (p),$$

wo $P_k(x)$ der p-adische Grenzwert der Polynome $F_k^{(\mu)}(x)$ ist. Bezeichnen wir den Körper der rationalen p-adischen Zahlen durch P. Es ist am bequemsten (wenn auch nicht unbedingt notwendig) den Körper P zu einem solchen algebraisch abgeschlossenen Körper zu erweitern, welcher die gewöhnlichen algebraischen Zahlen enthält. Die gewöhnlichen Wurzeln von $F(x)$ liefern auch die p-adischen Wurzeln. Es seien die Wurzeln von $P_k(x)$

$$\beta_1^{(k)}, \dots, \beta_{n_k}^{(k)}.$$

Wenn die gewöhnlichen Wurzeln von $F_k(x) = 0$ gleich

$$\omega_1^{(k)}, \dots, \omega_{n_k}^{(k)}$$

sind (eine derselben ist $= \overline{\alpha}_k$), so sind bei geeigneter Bezeichnung im Falle $\nu \geqq \delta + 1$, die Körper

$$P(\beta_i^{(k)}) = P(\omega_i^{(k)}), \qquad (i = 1, 2, \dots, n_k).$$

In sämtlichen Körpern $P(\beta_i^{(k)})$, $R(\omega_i^{(k)})$ haben die Henselschen Primteiler, bzw. die Primideale, welche p teilen, denselben Grad g_k und die Multiplizität ist e_k. Die Diskriminanten der Körper (also auch die Diskriminante von $K^{(k)} = R(\overline{\alpha}_k)$) enthalten dieselbe höchste Potenz p^{d_k} von p. Da

$$\delta_k = 2\overline{\psi}_k + d_k \tag{5}$$

ausfällt, ist die Zahl $\overline{\psi}_k$ invariant für $\nu \geqq \delta + 1$.

---

[4]) Außer den grundlegenden Arbeiten von Hensel vgl. die Arbeit von K. Rychlík, Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper, *Journal für Math.*, **153** (1924), S. 94—107 und meine Noten: Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper, *Math. Zeitschrift*, **14** (1922), S. 244—249 und **20** (1924), S. 95—97; Über die Erweiterung des Körpers der p-adischen Zahlen zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper, *Math. Zeitschrift*, **19** (1924), S. 308—312; Über die Erweiterung eines algebraischen Zahlkörpers durch Henselsche Grenzwerte, *diese Acta*, **1** (1922—23), S. 74—79; Zur Theorie der algebraischen Körper, *diese Acta*, **2** (1924—26), S. 69–71. Wir erwähnen noch die große Abhandlung von A. Ostrowski, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, *Math Zeitschrift*, **39** (1935), S. 269—404.

Ist die höchste Potenz von p in der Diskriminante von K gleich p^d, so wird

(5*) $$\delta = 2\psi + d.$$

Nach einem Satze von HENSEL ist

(6) $$d = \sum_{k=1}^{r} d_k,$$

daraus folgt nach (4) die Richtigkeit der Relation (2).

3. Es sollen hier noch einige Bemerkungen folgen. Wenn man in Betracht zieht, daß die Zahlen δ_k, ϱ_{kl}, $\overline{\psi}_k$ für $\nu \geqq \delta + 1$ invariant sind, so sieht man, daß (2) für $\nu \geqq \delta + 1$ bewiesen ist, sobald dieselbe für genügend große ν feststeht. Wie schon erwähnt wurde, hat ORE[5]) gezeigt, daß (2) für genügend große ν richtig ist. In seinem Beweise wendet er die p-adischen Zahlen nicht an, aber er macht u. A. Gebrauch von seiner Zerlegung[6]) des Führers. Diese Theorie der Zerlegung kann hier beseitigt werden und so wird das Beweisverfahren vereinfacht. Das erreicht man, wenn die Relation (4) und

(7) $$d_k = g_k h_k, \quad d = \sum_{k=1}^{r} g_k h_k$$

angewendet werden, worin die Zahl p^{d_k} für genügend große ν die höchste Potenz von p in der Diskriminante von $K^{(k)} = R(\overline{\alpha}_k)$[7]) und $\mathfrak{p}_k^{h_k}$, bzw. $\overline{\mathfrak{p}}_k^{h_k}$ die höchste Potenz von $\mathfrak{p}_k$, bzw. $\overline{\mathfrak{p}}_k$ in den Differenten der Körper K, bzw. $K^{(k)}$ ist. (Durch $\overline{\mathfrak{p}}_k$ bezeichnen wir das Primideal von $K^{(k)}$, welches p teilt, es ist $p = \overline{\mathfrak{p}}_k^{e_k}$.) Aus (7) folgt nach dem Punkte **2** die Relation (6).

Wir erwähnen noch, daß der von ORE bewiesene Satz 5 (S. 344) ebenfalls für $\nu \geqq \delta + 1$ richtig ist.

(Eingegangen am 9. Dezember 1935.)

---

5) A. a. O. 1), S. 340—345.

6) A. a. O. 1), S. 332—340.

7) Wir wissen, daß dies auch die höchste Potenz von p in der Diskriminante von $P(\beta_l^{(k)})$ ist. Die Zahl p^d ist die höchste Potenz von p in der Diskriminante von K.

Bibliographie.

The Journal of Symbolic Logic, edited by ALONZO CHURCH and C. H. LANGFORD, consulting editors: PAUL BERNAYS, PAUL HENLE, S. C. KLEENE, S. K. LANGER, E. J. NELSON, W. V. QUINE, and J. B. ROSSER.

An international journal, publishing contributions to symbolic logic in English, French, and German. Volume I will include a complete bibliography of symbolic logic from the time of LEIBNIZ to the present. Promt critical rewiews of current literature in the field. Published quarterly by the *Association for Symbolic Logic, Inc. Annual membership, including* subscription to the Journal, $ 3.00. Library subscriptions, $ 3.00. Applications for membership or subscriptions should be sent to C. A. BAYLIS, Secretary-Treasurer, Brown University, Providence, R. I.

Szász Pál, A differenciál- és integrálszámitás elemei, FEJÉR LIPÓT előszavával, két kötet, XIV + 476 + X + 460 oldal, Budapest, Franklin-Társulat, 1935.

[Paul von Szász, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung, mit einem Vorwort von LEOPOLD FEJÉR, zwei Bände, XIV + 476 + + X + 460 S., Budapest, Franklin-Gesellschaft, 1935.]

Die ungarische mathematische Literatur ist zwar im Allgemeinen nicht sehr reich, Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung gab es jedoch schon einige. Das neue Lehrbuch von P. v. SZÁSZ weicht aber nicht nur von jenen, sondern auch von den meisten fremdsprachlichen Lehrbrüchern wesentlich ab.

Der behandelte Stoff ist allerdings im Großen und Ganzen das, was man in den Anfängervorlesungen vorzutragen pflegt. Es fehlen nur die mehrfachen Integrale, die man nicht gern entbehrt. Dafür wird man aber durch manche schönen Abschnitte entschädigt, die über den Rahmen der Anfängervorlesungen hinausgehen, über Gegenstände wie z. B. die Cauchyschen Funktionalgleichungen, einige Polynome, Approximationssätze von WEIERSTRASZ, Fouriersche Reihen, Eulersche Summenformel.

Der wesentliche Unterschied gegenüber den bekannten Lehrbüchern liegt in der Methode, die bei der Darstellung des Stoffes zugrunde gelegt würde. Es werden nämlich an die Spitze der einzelnen Abschnitte nicht Definitionen und allgemeine Sätze gestellt, auch keine bloßen „erläuternden Beispiele", die der Definition vorangehen, sondern eine Fülle von gut gewählten und gründlich diskutierten Aufgaben. Beim Studium dieser Aufgaben — unter denen sowohl elegante, wie auch kompliziertere vertreten sind (man hat ja nicht nur die hübschen Kunstgriffe, sondern auch die technischen Schwierigkeiten kennenzulernen) — werden die nötigen Begriffe vom Leser unwillkürlich erworben; die Definitionen dienen dann nur zum bewußten Hervorheben der wesentlichen Merkmale derselben.

Ähnlicherweise geht der allgemeinen Formulierung und dem Beweise der einzelnen Sätze die Erörterung mancher Spezialfälle derselben voran.

Die Vorteile einer solchen Methode wurden öfters von den Didaktikern betont; auch fand diese Methode bereits in dem beliebten Werk: *Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen* von KOWALEWSKI Anwendung. Nach Kenntnis des Referenten wurde aber diese Methode im vorliegenden Lehrbuch zum erstenmal zum Zweck einer systematischen Darstellung der Differential- und Integralrechnung verwendet. Dies benötigt natürlich wesentlich mehr Raum, als die übliche Methode. Übrigens wird die Anzahl der vorbereitenden Aufgaben stufenweise vermindert, damit der Leser sich allmählich an die abstraktere Behandlungsweise gewöhne.

Ein treffliches Lehrbuch, in erster Linie für Anfänger bestimmt, aber auch für Fortgeschrittene nützlich; besonders geeignet zum Selbststudium. Auch kann es vorzüglich als Hilfsbuch bei den an Universitäten üblicherweise gehaltenen Übungen zur Infinitesimalrechnung dienen.

L. Kalmár.

Georg Scheffers, Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten? (Math.-Phys. Bibliothek, Reihe I, Band 85/86), VI + 98 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

„Das Buch wendet sich überhaupt an alle, die wissen möchten, wie die Gradnetze der Atlanten zustandekommen. Verständlich ist es für jeden, der die Schulmathematik begriffen hat. Das Besondere des Buches besteht darin, daß die zur Sprache gebrachten Entwürfe von Landkarten vollständig durchgeführt werden. Denn es wird nicht nur dargetan, wie man sie findet, sondern auch, wie man sie Schritt für Schritt selber zeichnen kann..."

Der Verfasser beschäftigt sich zuerst mit den verschiedenen flächentreuen Entwürfen, dann behandelt er eingehend die winkeltreuen, dann die perspektiven Entwürfe und schließlich die Sternkarte. Neben der leichten Darstellungsart sind noch die schönen und anschaulichen Abbildungen hervorzuheben.

B. Győrffy.

T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, dritter Band, Heft 1), VII + 164 S., Berlin, J. Springer, 1934.

Entsprechend dem Charakter der Sammlung, in welcher dieses Buch erschienen ist, findet der Leser in diesem Werke keine ausführlichen Beweise, wohl aber fast alle bezüglich der konvexen Körper bisher erhaltenen Resultate, die Fachliteratur bis auf Werke geringster Bedeutung, umfassende Literaturberichte und teils skizzierte, teils ausgeführte Beweisverfahren. Das Buch bietet nicht nur eine klare Übersicht der Ergebnisse und deren Zusammenhänge, sondern weist auch auf die bisher ungelöste Probleme hin.

Im Werke wird alles für den n-dimensionalen Raum formuliert, auch wo in den Originalabhandlungen dies nicht der Fall ist. Die Behandlungsweise ist meistens analytisch. Oft angewandte Hilfsmittel sind die Stützfunktionen der konvexen Körper. Linearkombinationen und gemischte Volumina werden ausführlich behandelt. Die Brunn-Minkowskischen Ungleichungen und verwandte Betrachtungen bilden einen der Hauptgegenstände des Werkes. Besonders hervorzuheben ist eine klare und übersichtliche Darlegung der Extremumprobleme, insbesondere des isoperimetrischen Problems. Auf differentialgeometrische Untersuchungen wird nur kurz eingegangen.

Das Buch ist einem jeden, der sich mit den konvexen Körpern beschäftigen will, oder einen Überblick über die diesbezüglichen Ergebnisse und Literatur gewinnen möchte, wärmstens zu empfehlen.

G. Hajós.

Heinrich Liebmann, Synthetische Geometrie (Teubners math. Leitfäden, Band 40), VIII + 119 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Das Ziel vorliegender Darstellung ist eine moderne axiomatische Begründung der synthetischen Geometrie. Als Ausgangspunkt dienen die Hilbertschen Verknüpfungsaxiome. Die Grundlagenforschungen von G. Fano, Hilbert und Veblen bilden den Grund zu diesem methodisch reinen Aufbau der synthetischen Geometrie. Die metrischen Begriffe werden konsequent vermieden und der ganze Aufbau wird nur von den Begriffen: *Lage* und *Sicht* beherrscht. Verfasser verzichtet auf den Dedekindschen Schnitt und benutzt nur die sogenannten „schwachen" Stetigkeitsaxiome. Diese bedeuten in arithmetischer Sprache, „daß die synthetische Geometrie realisierbar ist in dem durch Adjunktion von zweiten und dritten Radikalen erweiterten Körper der rationalen Zahlen". — Der erste Teil des Buches behandelt die ebene Geometrie in fünf Kapiteln: I. Axiomatik und Hauptsätze der synthetischen Geometrie. II. Vollständiges Viereck und Projektivität auf linearen Trägern. III. Ausbau der Lehre von den Kegelschnitten. IV. Kegelschnittpaare und Kegelschnittbüschel. V. Kollineationen in der Ebene. Der zweite Teil behandelt Ausschnitte aus der synthetischen Raumgeometrie. — Erwähnenswert sind endlich die lehrreichen Aufgaben und die guten Figuren, welche die Anschauung in einem hohen Maße stützen.

St. Lipka.

R. Pozdèna, Meter und Kilogramm (Math.-Phys. Bibliothek, Reihe I, Band 76), IV + 45 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Das Büchlein gliedert sich in zwei Teile. Im ersten gibt es eine historische Übersicht der Entstehung und Vereinheitlichung der verschiedenen

Maßsysteme, eine kurze Geschichte der großen Kulturbewegung, die zum Zustandekommen des metrischen Maßsystems führte. Der zweite physikalisch-technische Teil berichtet über die Möglichkeiten der Sicherung des metrischen Maßsystems.

Béla v. Sz. Nagy.

Werner Heintze, Kristallprojektion im Vergleich mit entsprechenden Erdkarten und mit einer Anwendung auf die Laue-Aufnahmen (Math.-Phys. Bibliothek, Reihe I, Band 82), IV + 32 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Verfasser stellt sich die Aufgabe, durch vorliegende Schrift dem Studium der Kristalle neue Freunde zu werben, was ihm durch die elementare und anschauliche Betrachtungsweise hoffentlich zu einem gewissen Grade gelingen wird.

Es werden die stereographische, gnomonische und orthographische Projektionsverfahren an den entsprechenden Erdprojektionen auseinandergelegt und dann im Falle des Beryllkristalls kristallographisch angewendet. Im letzten Kapitel werden die Laue-Aufnahmen und deren Entzifferung berührt.

Es ist zwar leicht verständlich, daß auf 32 kleinen Seiten die hier angeschlagene Fragen nicht ausführlich behandelt werden können, doch ist es zu bedauern, daß diese Kürze stellenweise der Verständlichkeit schadet. So kann man z. B. dem Buche nicht entnehmen, wie die Indizes der einzelnen Kristallflächen etwa in der gnomonischen Projektion festgestellt werden können.

Am Ende wird ein Verzeichnis der wichtigsten Literatur zusammengestellt.

F. Bukovszky.

B. L. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, vierter Band, Heft 2), 91 S., Berlin, J. Springer, 1935.

Das Heft gliedert sich in zwei Teile, deren erster die linearen Gruppen, der zweite aber die Darstellungstheorie von Ringen und Gruppen behandelt.

Der erste Teil beginnt mit einer kurzgefaßten Aufzählung der Grundeigenschaften der linearen Transformationen (§ 1). Ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K (der immer kommutativ gedacht wird) ist als eine additiv geschriebene abelsche Gruppe mit K als Operatorenbereich und mit n Basiselementen definiert. Eine lineare Transformation ist dann eine operatorhomomorphe Abbildung eines Vektorraumes auf einen anderen. § 2—§ 6 berichten über einige wichtige Typen von linearen Gruppen, wie die allgemeine und spezielle lineare Gruppe, die projektive Gruppe, die Komplexgruppe, die unitäre, sowie die orthogonale

Gruppe. § 7 gibt eine eingehende und neuartige Untersuchung der Isomorphismen der orthogonalen Gruppen in 3, 4, 5, 6 Dimensionen zu gewissen linearen Gruppen kleineren Grades. § 8—§ 10 berichten über die besonderen Eigenschaften des Falles, wo K der komplexe Zahlkörper ist (endliche lineare Gruppen, unendliche diskrete Gruppen von gebrochenlinearen Transformationen usw.). Über die kontinuierlichen linearen Gruppen wird in einem weiteren Heft dieser Sammlung berichtet.

Der Aufbau des darstellungstheoretischen Teiles folgt die Methode von E. NOETHER. Der Darstellungsraum wird als eine additive abelsche Gruppe mit zweierlei Operatoren: die Elemente von K (rechts geschrieben) und die Darstellungsmatrizes (links geschrieben) aufgefaßt; die grundlegenden Eigenschaften der Darstellungen können dann fast unmittelbar aus allgemeinen gruppentheoretischen Sätzen herausgelesen werden (§ 11). Die Behandlung gründet sich hauptsätzlich auf das Schursche Lemma.

Nach einem knappen, teilweise mit kurzen Beweisen versehenen Bericht über die Darstellungen der hyperkomplexen Systeme und der endlichen Gruppen (Sätze von BURNSIDE, MASCHKE usw.) in den §§ 12—13, wird in § 14 auf die Frage der beschränkten Darstellungen beliebiger Gruppen im Körper der komplexen Zahlen ausführlich eingegangen. Diese schöne Theorie von J. v. NEUMANN, die wohl als der wichtigste Erfolg der letzten Jahren auf diesem Gebiet angesehen werden kann, wird hier mit etwas veränderten Beweisen vollständig wiedergegeben. Auf die ursprüngliche v. Neumannsche Arbeit wird fast nur in Hinsicht der Existenz und der Eingenschaften der Mittel fastperiodischer Funktionen verwiesen. In den Beweisen benutzt der Verfasser dem algebraischen Charakter der Frage gemäß (in Anlehnung an G. KÖTHE) möglichst wenig aus der Theorie der Integralgleichungen, aber mehr algebraische Schlüsse.

§ 15 beschäftigt sich mit den Charakteren und Spuren, § 16 mit dem Zerfallen der irreduziblen Darstellungen bei Erweiterung des Grundkörpers, § 17 mit Faktorensystemen. Im § 18 wird auf die Ganzzahligkeitseigenschaften, sowie auf die Probleme der modularen Darstellungen (Darstellungen in Körpern der Charakteristik p) eingegangen. § 19—§ 22 berichten über die Beziehungen zwischen den Darstellungen einer Gruppe und denen ihren Untergruppen, über Darstellungen spezieller Gruppen, über Darstellungen durch projektive Transformationen, endlich über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe.

Leider wird über die Darstellungstheorie der Lieschen Gruppen, insbesondere über die Lie-Cartan-Weylsche Theorie der Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen nicht berichtet; diese Dinge (die inzwischen u. a. durch wertvolle Ergebnisse des Verfassers und des Herrn H. CASIMIR bereichert wurden) sind wahrscheinlich für das in Aussicht gestellte Heft über Gruppentheorie vorbehalten.

Der reiche Inhalt, die vollständigen Literaturangaben und die wohlbekannte, höchst elegante, knappe, „van der Waerdensche" Darstellungsweise werden zweifellos dem Heft den wohlverdienten Erfolg erwerben.

Béla v. Sz. Nagy.

Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierter Relationen auf „arithmetische“.

Von TH. SKOLEM in Bergen.

Vor einigen Jahren hat K. GÖDEL bewiesen[1]), daß jede „rekursive“ Relation „arithmetisch“ ist. Dabei versteht er unter einer „rekursiven“ Relation eine Gleichung, deren beide Seiten mit Hilfe von Funktionen aufgebaut sind, die allein unter Anwendung von primitiven Rekursionen und Einsetzungen gebildet sind. Eine primitive Rekursion ist die rekursive Definition einer Funktion φ durch das Schema[2])

$$\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n)$$
$$\varphi(k+1, x_2, \ldots, x_n) = \mu(k, \varphi(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n),$$

worin ψ und μ früher bekannte Funktionen sind. Andererseits ist unter einer „arithmetischen“ Relation eine zu verstehen, die auf Grund der fünf logischen Operationen (Konjunktion, Disjunktion, Negation, Anwendung der All- und Seinszeichen) aus Gleichungen aufgebaut ist, deren Seiten durch Addition und Multiplikation gebildet sind. Dieser Satz von GÖDEL soll hier verallgemeinert werden.

Ich benutze im folgenden ein Prinzip, mit dessen Hilfe es möglich ist endliche Mengen von (nichtnegativen ganzen) Zahlen und auch endliche Mengen von Zahlenpaaren, Zahlentripeln u. s. w. gewissermaßen als Zahlen aufzufassen, d. h. das Prinzip gibt eine eineindeutige Beziehung zwischen den Zahlen selbst und den daraus gebildeten endlichen Mengen und Relationen. Ist N eine

---

1) K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I., *Monatshefte für Math. u. Phys.*, **38** (1931), S. 173—198, insb. S. 191—193.

2) L. c., S. 179.

endliche Menge von Zahlen — ihre Elemente mögen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ heißen —, so bilde ich die Zahl

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_m}$$

und sage, daß n der Menge N entspricht. Augenscheinlich ist dies Entsprechen gegenseitig eindeutig, da bekanntlich jede Zahl in einer und nur einer Art als Summe von Potenzen von 2 darstellbar ist. Der Beziehung $a \in N$ entspricht die Beziehung zwischen a und n, die dadurch ausgedrückt wird, daß a der Exponent einer der Potenzen von 2 ist, die in der Darstellung von n als Summe von Potenzen von 2 auftreten. Um dies genauer und einfacher auszudrücken, führe ich eine Funktion $\varepsilon(x, y)$ ein, welche nur die Werte 0 und 1 haben soll, so daß ich jede ganze nichtnegative Zahl n in der Form

$$n = \varepsilon(0, n) . 2^0 + \varepsilon(1, n) . 2^1 + \ldots + \varepsilon(r, n) . 2^r + \ldots$$

schreiben kann, wo die Summation rechts z. B. bis $r = n$ fortgesetzt wird. Dann ist $\varepsilon(r, n)$ stets und nur dann $= 1$, wenn r Element der Menge N ist, welche n entspricht, oder m. a. W. die Gleichung $\varepsilon(r, n) = 1$ ist die Übersetzung der Beziehung $r \in N$.

Hat man eine endliche Menge N von geordneten Zahlenpaaren (x, y), so entspricht dieser in ein-eindeutiger Weise eine Zahl n, wie folgt. Zuerst gibt die Gleichung

$$(1) \qquad \binom{x+y+1}{2} + \binom{x}{1} = z$$

ein ein-eindeutiges Entsprechen zwischen den Zahlenpaaren (x, y), wo x und y nichtnegativ sind, einerseits und den einzelnen nichtnegativen Zahlen z andererseits. Der Menge N von Paaren (x, y) entspricht dann zufolge (1) eine Menge M von einzelnen Zahlen z, und dieser entspricht wieder eine Zahl n in dem Sinne, daß $\varepsilon(z, n) = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem $z \in M$ ist oder nicht. Oder m. a. W. der Menge N von Paaren (x, y) entspricht die Zahl

$$n = \sum_z 2^z,$$

wo die Summation in bezug auf z über alle z ausgedehnt wird, die durch (1) geliefert werden, indem (x, y) die Menge N durchläuft. Der Beziehung $(x, y) \in N$ entspricht also die Gleichung

$$\varepsilon\left(\binom{x+y+1}{2} + \binom{x}{1}, n\right) = 1.$$

Ebenso entspricht jeder endlichen Menge N von geordneten Tripeln

(x, y, z) eine eindeutig bestimmte Zahl n derart, daß $(x, y, z) \in N$ mit

$$\varepsilon\left(\binom{x+y+z+2}{3}+\binom{x+y+1}{2}+\binom{x}{1}, n\right)=1$$

gleichbedeutend ist[3]) u. s. w.

Es ist leicht zu verstehen, wie man dies oft mit Vorteil benutzen kann, um Aussagen, worin Allzeichen oder Seinszeichen auftreten, die sich auf Klassen (von Zahlen) oder Relationen (zwischen Zahlen) beziehen, in Aussagen zu verwandeln, worin nur Allzeichen und Seinszeichen für Individuen (Zahlen) vorkommen. Das wird nämlich stets möglich sein, wenn der elementare Aussagenkern eine solche Form hat, daß wenn die Existenz einer Klasse oder einer Relation behauptet wird, dies bedeutet, daß es eine endliche Klasse oder Relation gibt von gewisser Art; oder wenn die Allgemeingültigkeit für Klassen oder Relationen behauptet wird, das bedeutet, daß die Klasse oder Relation so und so beschaffen ist, wenn sie endlich ist. Daß eine Klasse (Menge einzelner Zahlen) oder Relation (Menge geordneter n-Tupel ganzer Zahlen) endlich ist, kann am einfachsten dadurch ausgedrückt werden, daß jede Zahl darin kleiner als eine gewisse Zahl ist.

Ich gebe zur Erläuterung ein Beispiel. Die folgende Aussage soll betrachtet werden: Zu jeder endlichen Menge M_1 und jeder endlichen Menge M_2 von ganzen Zahlen gibt es eine endliche Menge M_3 derart, daß $m_3 \in M_3$ stets und nur dann, wenn es ein $m_1 \in M_1$ und ein $m_2 \in M_2$ gibt, so daß $m_1 + m_2 = m_3$ ist. Augenscheinlich ist diese Aussage wahr. M_3 ist die Menge aller Summen $m_1 + m_2$, wo $m_1 \in M_1$ und $m_2 \in M_2$. In logischen Symbolen kann sie so geschrieben werden, wenn ich den Variationsbereich der Mengensymbole auf die endlichen Mengen beschränke:

$$(2)\quad (M_1, M_2)(EM_3)(m_3)\{(Em_1, m_2)((m_1 \in M_1)\,\& \\ \&\,(m_2 \in M_2)\,\&\,(m_3 = m_1 + m_2)) \rightleftarrows (m_3 \in M_3)\}.$$

Will man die Aussage so schreiben, daß der Variationsbereich der Mengen der Bereich aller Zahlenmengen ist, so muß das Prädikat $\mathcal{E}(M)$, d. h. M ist endlich, besonders eingeführt werden. Dann nimmt sie die folgende Gestalt an:

---

[3]) Im folgenden schreibe ich statt $\varepsilon\left(\binom{x+y+1}{2}+\binom{x}{1}, n\right)=1$, $\varepsilon\left(\binom{x+y+z+2}{3}+\binom{x+y+1}{2}+\binom{x}{1}, n\right)=1$, u. s. w., kürzer $\varepsilon(x, y, n)=1$, $\varepsilon(x, y, z, n)=1$, u. s. w.

$$(M_1, M_2)\left[\mathcal{E}(M_1) \mathbin{\&} \mathcal{E}(M_2) \rightarrow (EM_3)\big(\mathcal{E}(M_3) \mathbin{\&} \right.$$
$$\left. \mathbin{\&} (m_3)\{(Em_1, m_2)\,((m_1 \in M_1) \mathbin{\&} (m_2 \in M_2) \mathbin{\&} (m_3 = m_1 + m_2)) \rightleftarrows (m_3 \in M_3)\}\big)\right].$$

Hier kann man $\mathcal{E}(M)$ durch die Aussage $(Ey)\,(x)\,((x \in M) \rightarrow (x < y))$ ersetzen. Dann bekommt man eine Aussage, worin teils einige Individuenvariablen vorkommen, und teils einige Mengenvariablen, wobei für die letzteren also die Gesamtheit aller Zahlenmengen der Variationsbereich ist. Nach dem eben erklärten Prinzip ist es aber klar, daß (2) mit der folgenden Aussage

$$(3) \quad (z_1, z_2)\,(Ez_3)\,(m_3)\,[(Em_1, m_2)\,((\varepsilon(m_1, z_1) = 1) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (\varepsilon(m_2, z_2) = 1) \mathbin{\&} (m_3 = m_1 + m_2)) \rightleftarrows (\varepsilon(m_3, z_3) = 1)]$$

gleichwertig ist, und in (3) kommen ausschließlich Zahlenvariablen vor.

Für die Reduktion rekursiver Definitionen auf explizite, welche ich hier durchführe, ist es besonders wichtig zu bemerken, daß die Funktion $\varepsilon(x, y)$ eine rekursive ist, und zwar ist $\varepsilon(x, y)$ durch primitive Rekursionen definierbar. Zuerst kann man die folgende Definition aufstellen, indem gleichzeitig eine Hilfsfunktion $\lambda(n)$ eingeführt wird, und sonst auch die Funktionen 2^x, $\iota(x, y)$, $\operatorname{sg} x$, $\left[\frac{n}{2}\right]$ und $\dot{-}$ benutzt werden, die man bei R. Péter[4]) findet:

$$(4) \quad \begin{aligned} &\lambda(0) = 0,\ \lambda(n+1) = \lambda\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) + 1 \\ &\varepsilon(r, 0) = 0,\ \varepsilon(r, n+1) = \iota(r, \lambda(n)) + \\ &\qquad + \varepsilon(r, n + 1 \dot{-} 2^{\lambda(n)})\operatorname{sg}(\lambda(n) \dot{-} r). \end{aligned}$$

Man erkennt, daß $\lambda(n)$ nichts anderes ist als $\left[\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right]$.

Offenbar sind λ und ε durch Wertverlaufsrekursionen definiert; nach Péter lassen sich aber diese auf primitive Rekursionen zurückführen. Die Beziehungen $\varepsilon(x, y) = 0$ und $\varepsilon(x, y) = 1$ sind deshalb „arithmetisch".

Es wird nun aus dem folgenden hervorgehen, daß alle Beziehungen, welche mittels Rekursionen mit lauter freien Zahlenvariablen konstruierbar sind, „arithmetisch" sind, und oft gilt das auch dann, wenn gebundene Variablen in den Rekursionen auftreten. Ich zeige das dadurch, daß ich zu jeder rekursiven Beziehung

---

[4]) R. Péter, Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Annalen,* **110** (1934), S. 612—632.

eine äquivalente Beziehung finde, die auf Grund früherer arithmetischer Beziehungen und Gleichungen $\varepsilon(x, y) = 1$ unter Anwendung der fünf logischen Operationen aufgebaut ist.

Zuerst will ich die primitiven Rekursionen behandeln, trotzdem diese schon durch den Gödelschen Satz vollständig erledigt sind. Es seien also $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und $\chi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ schon bekannte Funktionen, und es sei schon bekannt, daß die Gleichungen $y = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und $y = \chi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ „arithmetische" Aussagen sind. Es wird eine Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ rekursiv definiert durch das Schema

$$(5)\quad \begin{aligned} \varphi(0, x_2, \ldots, x_n) &= \psi(x_2, \ldots, x_n) \\ \varphi(k+1, x_2, \ldots, x_n) &= \chi(k, \varphi(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Wir können dann für jede ganze positive Zahl ν die endlichen Mengen M von $(n+1)$-tupeln $(x_1, \ldots, x_n, y)$ betrachten, für welche die Konjunktion $A(\nu, M)$ der folgenden Aussagen

1) $(x_1, \ldots, x_n, y)[((x_1, \ldots, x_n, y) \in M) \rightarrow$
$\rightarrow (x_1 \leqq \nu) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu)]$

2) $(x_2, \ldots, x_n)[(x_2 \leqq \nu) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (\psi(x_2, \ldots, x_n) \leqq \nu) \rightarrow$
$\rightarrow ((0, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_2, \ldots, x_n)) \in M)]$

3) $(x_1, \ldots, x_n, y, z)[((x_1, \ldots, x_n, y) \in M) \,\&\, (z = \chi(x_1, y, x_2, \ldots, x_n)) \,\&$
$\& \,(x_1 + 1 \leqq \nu) \,\&\, (z \leqq \nu) \rightarrow ((x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n, z) \in M)]$

gilt. Dann kann ich zweierlei beweisen:

I. Ist $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, so gibt es eine Zahl μ derart, daß für alle $\nu \geqq \mu$ das $(n+1)$-tupel $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M$ ist für alle M, für welche $A(\nu, M)$ wahr ist, oder m. a. W. es gilt

$$(y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)) \rightarrow (E\mu)(\nu, M)[(\nu \geqq \mu) \,\&\, A(\nu, M) \rightarrow \rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)].$$

II. Ist $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M$, so oft $A(\nu, M)$ stattfindet für irgendein ν, so ist $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, oder m. a. W. man hat

$$(M)(A(\nu, M) \rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)) \rightarrow (y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Beweis von I. Die Behauptung ist wahr für $x_1 = 0$ und beliebige Werte von $x_2, \ldots, x_n$. Denn ist $y = \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)$, so ist $y = \psi(x_2, \ldots, x_n)$, und ist z. B. $\mu = \max(\psi(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$, so folgt nach 2), daß $(0, x_2, \ldots, x_n, y) \in M$ ist, so oft $\nu \geqq \mu$ ist, und $A(\nu, M)$ gilt. Die Behauptung sei wahr für $x_1, \ldots, x_n$. Dann gibt es also eine Zahl μ derart, daß wenn $\nu \geqq \mu$ ist, und $A(\nu, M)$ gilt, $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M$ ist, wenn $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Nun sei

$z = \varphi(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n)$ und $\mu' = \max(\mu, z, x_1 + 1)$. Dann erkennt man, wenn man (5) und 3) ansieht, daß so oft $(\nu \geqq \mu') \& A(\nu, M)$ gilt, $(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n, z) \in M$ ist. Hierdurch ist I bewiesen.

Beweis von II. Es sei M_ν die endliche Menge von $(n+1)$-tupeln $(x_1, \ldots, x_n, y)$, wo $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, die man erhält, wenn man für $x_1, \ldots, x_n$ alle solchen Zahlen $\geqq 0$ und $\leqq \nu$ einsetzt, daß auch $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqq \nu$ bleibt. Dann gilt $A(\nu, M_\nu)$. Gibt es ein ν derart, daß immer $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M$ ist, wenn $A(\nu, M)$ stattfindet, so ist deshalb $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M_\nu$ und folglich $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Hierdurch ist II bewiesen.

Aus I und II folgt offenbar, daß die Gleichung $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, wenn φ durch (5) definiert wird, mit der Aussage

$$(E\mu)(\nu, M)[(\nu \geqq \mu) \& A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)]$$

gleichbedeutend ist. Diese ist wiederum mit

$$(6) \qquad (E\mu)(\nu, u)[(\nu \geqq \mu) \& A^*(\nu, u) \to (\varepsilon(x_1, \ldots, x_n, y, u) = 1)]$$

gleichwertig, wobei $A^*(\nu, u)$ aus $A(\nu, M)$ erhalten wird dadurch, daß man M durch u ersetzt und zugleich $\varepsilon(t_1, \ldots, t_m, u) = 1$ statt $(t_1, \ldots, t_m) \in M$ schreibt. Da die Aussagen $\varepsilon(t_1, \ldots, t_m, u) = 1$ „arithmetisch" sind, und die Gleichungen $y = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und $z = \chi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ als „arithmetisch" vorausgesetzt wurden, so ist $A^*(\nu, u)$ „arithmetisch" und also auch (6).

Hiernach soll die Rekursion behandelt werden, die von R. Péter angegeben ist[5]) zur Vereinfachung des Ackermannschen Beispiels einer Funktion, die nicht mittels primitiver Rekursionen definierbar ist. Die Pétersche Funktion $\varphi(m, n)$ wird so definiert:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \varphi(0, n) &= 2n + 1 \\ \varphi(m+1, 0) &= \varphi(m, 1) \\ \varphi(m+1, n+1) &= \varphi(m, \varphi(m+1, n)). \end{aligned}$$

Es sollen die endlichen Tripelmengen T betrachtet werden, für welche die Aussage $A(\nu, T)$ gilt, welche die Konjunktion der folgenden vier Aussagen ist:

1) $(x, y, z)[((x, y, z) \in T) \to (x \leqq \nu) \& (y \leqq \nu) \& (z \leqq \nu)]$
2) $(x)[(2x + 1 \leqq \nu) \to ((0, x, 2x + 1) \in T)]$
3) $(x, y)[(x + 1 \leqq \nu) \& ((x, 1, y) \in T) \to ((x + 1, 0, y) \in T)]$
4) $(x, y, z, u)[(y + 1 \leqq \nu) \& ((x + 1, y, z) \in T) \& ((x, z, u) \in T) \to$
$\to ((x + 1, y + 1, u) \in T)]$.

---

[5]) R. Péter, Konstruktion nicht-rekursiver Funktionen, *Math. Annalen*, **111** (1935), S. 42—60.

Dann kann ich wieder zweierlei beweisen:

I. Man hat

$$(z = \varphi(x, y)) \rightarrow (E\mu)(\nu, T)[(\nu \geqq \mu) \& A(\nu, T) \rightarrow ((x, y, z) \in T)].$$

II. Es gilt

$$(T)[A(\nu, T) \rightarrow ((x, y, z) \in T)] \rightarrow (z = \varphi(x, y)).$$

Beweis von I. Die Richtigkeit für $x = 0$ und beliebiges y erkennt man sofort; denn setzt man z. B. $\mu = 2y + 1$, so hat man

$$(\nu \geqq \mu) \& A(\nu, T) \rightarrow ((0, y, 2y+1) \in T)$$

für alle ν und T zufolge 2). Ich nehme an, daß I schon bewiesen ist für x und beliebiges y. Dann soll zuerst gezeigt werden, daß I für $(x+1, 0)$ gilt. Nach der Annahme gibt es also ein μ derart, daß $(x, 1, \varphi(x, 1)) \in T$ ist, wenn $A(\nu, T)$ gilt, und $\nu \geqq \mu$ ist. Ist $\mu' = \max(\mu, x+1)$, so erkennt man beim Anblick von 3), daß

$$(x+1, 0, \varphi(x+1, 0)) \in T$$

sein wird, so oft $\nu \geqq \mu'$ ist und $A(\nu, T)$ gilt. Jetzt nehme ich an, daß I schon bewiesen ist für $x+1$ und alle y kleiner als ein gewisses $y+1$. Nach der Annahme gibt es dann eine Zahl μ_1, so daß

$$(x+1, y, \varphi(x+1, y)) \in T$$

aus $(\nu \geqq \mu_1) \& A(\nu, T)$ folgt. Weiter gibt es ein μ_2, so daß

$$(x, \varphi(x+1, y), \varphi(x+1, y+1)) \in T$$

aus $(\nu \geqq \mu_2) \& A(\nu, T)$ folgt. Setzt man nun $\mu = \max(\mu_1, \mu_2, y+1)$, so folgt aus $(\nu \geqq \mu) \& A(\nu, T)$ die Wahrheit der Konjunktion

$$(y+1 \leqq \nu) \& ((x+1, y, \varphi(x+1, y)) \in T) \&$$
$$\& ((x, \varphi(x+1, y), \varphi(x+1, y+1)) \in T).$$

Beim Anblick von 4), die ja wahr ist, wenn $A(\nu, T)$ gilt, erkennt man, daß

$$(x+1, y+1, \varphi(x+1, y+1)) \in T$$

aus $(\nu \geqq \mu) \& A(\nu, T)$ folgt. Also gilt I auch für $x+1$ und alle y und gilt also allgemein.

Beweis von II. Es sei T_ν die endliche Menge von Tripeln (x, y, z), wo $z = \varphi(x, y)$, und x, y, z alle $\leqq \nu$ sind. Dann gilt $A(\nu, T_\nu)$. Gibt es ein ν derart, daß für alle T immer $(x, y, z) \in T$ ist, wenn $A(\nu, T)$ gilt, so ist $(x, y, z) \in T_\nu$, woraus folgt, daß $z = \varphi(x, y)$ ist.

Aus I und II folgt, daß $z = \varphi(x, y)$, wenn φ durch (7) definiert wird, mit der Aussage

$$(E\mu)(\nu, T)[\nu \geqq \mu) \& A(\nu, T) \rightarrow ((x, y, z) \in T)]$$

gleichbedeutend ist. Diese kann wieder durch die Aussage

$$(8) \qquad (E\mu)(\nu, v)[(\nu \geqq \mu) \& A^*(\nu, v) \rightarrow (\varepsilon(x, y, z, v) = 1)]$$

ersetzt werden, wo A^* aus A erhalten wird, wenn darin T durch v und jede Beziehung $(t_1, t_2, t_3) \in T$ durch $\varepsilon(t_1, t_2, t_3, v) = 1$ ersetzt wird. Hierdurch ist bewiesen, daß $z = \varphi(x, y)$ eine „aritmetische" Beziehung ist.

In ähnlicher Weise wäre es leicht weitere Beispiele zu behandeln; man sieht leicht ein, daß das Beweisverfahren auf alle Rekursionen mit lauter freien Variablen angewandt werden kann. Indessen möchte ich versuchen, eine allgemeine Formulierung zu geben. Das enthält eine gewisse Schwierigkeit, weil die erwähnten Rekursionen sehr verschiedene Strukturen haben können. Ich zeige deshalb zuerst, wie man diese Rekursionen auf eine gewisse Art von Rekursionen zurückführen kann, worin gebundene Variablen auftreten, aber so, daß bloss Seinszeichen vorkommen und zwar im definiens. Wie diese Zurückführung zu verstehen ist und gemacht werden kann, zeige ich zuerst durch einige Beispiele.

Betrachtet man das Schema der primitiven Rekursionen

$$\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n)$$
$$\varphi(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n) = \chi(x_1, \varphi(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n),$$

so erkennt man leicht, daß diese Rekursion gleichwertig ist mit der rekursiven Definition der Aussagenfunktion $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ durch das Schema

$$(y = \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)) \rightleftarrows (y = \psi(x_2, \ldots, x_n))$$
$$(9) \qquad (y = \varphi(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n)) \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows (Ez)\big((y = \chi(x_1, z, x_2, \ldots, x_n)) \& (z = \varphi(x_1, \ldots, x_2))\big).$$

Ebenso ist die Definition der Péterschen Funktion $\varphi(m, n)$ gleichwertig mit der Definition der Aussagenfunktion $z = \varphi(x, y)$ durch das Schema

$$(z = \varphi(0, y)) \rightleftarrows (z = 2y + 1)$$
$$(10) \qquad (z = \varphi(x + 1, 0)) \rightleftarrows (z = \varphi(x, 1))$$
$$(z = \varphi(x + 1, y + 1)) \rightleftarrows (Eu)\big((z = \varphi(x, u)) \& (u = \varphi(x + 1, y))\big).$$

Betrachtet man die weitläufigere Rekursion

$$\varphi(0, y) = \alpha(y)$$
$$\varphi(x + 1, 0) = \beta\big(x, \varphi(x, a_1), \varphi(x, \varphi(x, a_2))\big)$$
$$\varphi(x + 1, y + 1) = \gamma(x, \varphi(x, \delta_1(y)), \varphi(\delta_2(x), \varphi(x, b)), \varphi(x + 1, y)),$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2$ früher bekannte Funktionen, a_1, a_2 und b Konstanten, und $\delta_2(t) \leqq t$ für alle t, so ist diese mit der rekursiven Definition der Aussagenfunktion $z = \varphi(x, y)$ mittels des Schemas

$$
\begin{aligned}
&(z = \varphi(0, y)) \rightleftarrows (z = \alpha(y)) \\
&(z = \varphi(x+1, 0)) \rightleftarrows (Eu, v, w) \left[(z = \beta(x, u, w)) \,\&\right. \\
(11) \qquad &\qquad \left.\& (u = \varphi(x, a_1)) \,\&\, (v = \varphi(x, a)) \,\&\, (w = \varphi(x, v))\right] \\
&(z = \varphi(x+1, y+1)) \rightleftarrows (Et, u, v, w) \left[(z = \gamma(x, t, v, w)) \,\&\right. \\
&\qquad \& \left(t = \varphi(x, \delta_1(y))\right) \,\&\, (u = \varphi(x, b)) \,\&\, (v = \varphi(\delta_2(x), u)) \,\& \\
&\qquad \left.\& (w = \varphi(x+1, y))\right]
\end{aligned}
$$

gleichwertig. Alle drei Schemata (9), (10), (11) sind nun in einem allgemeinen Schema enthalten, das ich jetzt erklären will.

Wir können alle n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ der ganzen nichtnegativen Zahlen lexikographisch ordnen, d. h. wir setzen

$$(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_n),$$

wenn es ein $\nu \geqq 0$ und $< n$ gibt derart, daß $a_i = b_i$ ist für alle $i \leqq \nu$, während $a_{\nu+1} < b_{\nu+1}$ ist. Dann setzen wir, indem $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ eine zu definierende Aussagenfunktion ist,

(12) $\quad F(x_1, \ldots, x_n, y) \rightleftarrows (Ez_1, \ldots, z_m)\, U(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m),$

wobei U durch Konjunktion aufgebaut ist teils aus früher bekannten Aussagenfunktionen von den (oder einigen der) Variablen $x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m$ und teils aus Aussagenfunktionen $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$, wo $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta$ solche zahlentheoretische Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, $y, z_1, \ldots, z_m$ sind, daß $(\xi_1, \ldots, \xi_n) < (x_1, \ldots, x_n)$ ist abgesehen vom Falle $x_1 = \ldots = x_n = 0$, wo keine Funktion $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ auftritt; übrigens ist es oft möglich, daß auch in anderen Fällen keine Funktion $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ vorkommt.

Man erkennt sofort, daß (9), (10) und (11) Sonderfälle von (12) sind, und es ist nicht schwer einzusehen, daß alle Rekursionen mit freien Variablen, sowohl einfache wie mehrfache, in analoger Weise auf eine Rekursion der Form (12) zurückführbar sind. Man kann ja erstens statt der rekursiven Definition von $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ durch Gleichungen die Aussagenfunktion $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ durch Äquivalenzen definieren. Zweitens kann man in den in den Gleichungen rechts stehenden Ausdrücken (definiens) von innen damit anfangen, die dort vorkommenden zahlentheoretischen Funktionen schrittweise durch besondere Variable zu ersetzen, die Definition dieser Variablen konjunktiv hinzufügen und dieselben Variablen durch Seinszeichen binden. Es ist deshalb klar, daß wir einen allgemeinen Beweis dafür erhalten, daß die Rekursionen mit lauter freien Zahlenvariablen nur „arithmetische" Beziehungen liefern, wenn wir beweisen können, daß die durch (12) definierte Aussagenfunktion $F(x_1, \ldots, x_n\, y)$ „arithmetisch" ist. In der Tat kann nun der etwas allgemeinere Satz bewiesen werden:

S a t z: *Ist der Ausdruck U in* (12) *durch Konjunktion und Disjunktion aufgebaut aus früher bekannten „arithmetischen" Aussagenfunktionen der Variablen $x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m$ und Funktionen $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$, wo $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta$ solche zahlentheoretische Funktionen $f_1, \ldots, f_n, f$ von $x_1, \ldots, z_m$ sind, daß $(\xi_1, \ldots, \xi_n) < (x_1, \ldots, x_n)$ ist, während die Gleichungen $\xi_1 = f_1(x_1, \ldots, z_m), \ldots, \xi_n = f_n(x_1, \ldots, z_m)$, $\eta = f(x_1, \ldots, z_m)$ „arithmetische" Beziehungen sind, so ist $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ eine „arithmetische" Aussagenfunktion.*

B e w e i s: Für jede ganze nichtnegative Zahl ν und jede endliche Menge M von $(n+1)$-tupeln nichtnegativer ganzer Zahlen soll $A(\nu, M)$ die Konjunktion der beiden Aussagen

$$1)\quad (x_1, \ldots, x_n, y)\big(((x_1, \ldots, x_n, y) \in M) \rightarrow (x_1 \leqq \nu)\,\&\ldots\& \\ \&\,(x_n \leqq \nu)\,\&\,(y \leqq \nu)\big)$$

$$2)\quad (x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m)\,(U_*(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m)\,\& \\ \&\,(x_1 \leqq \nu)\,\&\ldots\&\,(y \leqq \nu) \rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M))$$

sein. Hier bedeutet U_* die Aussagenfunktion, welche aus U entsteht, wenn darin jede Aussage $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ durch $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta) \in M$ ersetzt wird. Mittels vollständiger Induktion können jetzt folgende Tatsachen I und II bewiesen werden:

$$\text{I.}\quad F(x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow \\ \rightarrow (E\mu)(\nu, M)\,[(\nu \geqq \mu)\,\&\,A(\nu, M) \rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)]$$

$$\text{II.}\quad (M)\,[A(\nu, M) \rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)] \rightarrow F(x_1, \ldots, x_n, y).$$

B e w e i s v o n I. Zuerst kann man die Richtigkeit von I für $x_1 = \ldots = x_n = 0$ dadurch einsehen, daß man die Richtigkeit von

$$F(0, \ldots, 0, y) \rightarrow (\nu, M)\,[(\nu \geqq y)\,\&\,A(\nu, M) \rightarrow ((0, \ldots, 0, y) \in M)]$$

oder mit lauter freien Variablen geschrieben

$$F(0, \ldots, 0, y) \rightarrow ((y \leqq \nu)\,\&\,A(\nu, M) \rightarrow ((0, \ldots, y) \in M))$$

beweist. Das kann so gemacht werden:

Zufolge (12) hat man

$$F(0, \ldots, 0, y) \rightarrow (Ez_1, \ldots, z_m)\,U(0, \ldots, 0, y, z_1, \ldots, z_m)$$

und deshalb auch

(13) $F(0, \ldots, 0, y) \rightarrow (Ez_1, \ldots, z_m)\, U_*(0, \ldots, 0, y, z_1, \ldots, z_m)$,

da nach einer obigen Bemerkung U_* sich von U nicht unterscheidet für $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Nach 2) hat man aber

$$A(\nu, M) \rightarrow (y, z_1, \ldots, z_m)\big(U_*(0, \ldots, 0, y, z_1, \ldots, z_m) \,\&\, (y \leqq \nu) \rightarrow \\ \rightarrow ((0, \ldots, 0, y) \in M)\big)$$

oder mit lauter freien Variablen geschrieben

$$A(\nu, M) \rightarrow \big(U_*(0, \ldots, 0, y, z_1, \ldots, z_m) \,\&\, (y \leqq \nu) \rightarrow ((0, \ldots, 0, y) \in M)\big)$$

oder wenn man will

(14) $A(\nu, M) \,\&\, (y \leqq \nu) \,\&\, U_*(0, \ldots, 0, y, z_1, \ldots, z_m) \rightarrow$
$\rightarrow ((0, \ldots, 0, y) \in M)$.

Aus (13) und (14) folgt aber augenscheinlich

$$F(0, \ldots, 0, y) \,\&\, A(\nu, M) \,\&\, (y \leqq \nu) \rightarrow ((0, \ldots, y) \in M)$$

oder wenn man will

$$F(0, \ldots, 0, y) \rightarrow \big(A(\nu, M) \,\&\, (y \leqq \nu) \rightarrow ((0, \ldots, 0, y) \in M)\big),$$

wie behauptet.

Danach setze ich voraus, daß die Richtigkeit von I schon erkannt ist für alle $\xi_1, \ldots, \xi_n, y$ (d. h. wenn $\xi_1, \ldots, \xi_n$ statt $x_1, \ldots, x_n$ geschrieben werden), für welche $(\xi_1, \ldots, \xi_n) < (x_1, \ldots, x_n)$ ist. Auf Grund dieser Voraussetzung soll die Richtigkeit von I für $(x_1, \ldots, x_n, y)$ bewiesen werden. Offenbar genügt es zu zeigen, daß für eine Zahl μ, welche von ν und M unabhängig, nämlich durch $x_1, \ldots, x_n, y$ bestimmt ist, die Formel

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow \big(A(\nu, M) \,\&\, (\nu \geqq \mu) \rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big)$$

für beliebige Werte von ν und M gilt. Aus (12) folgt

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow (Ez_1, \ldots, z_m)\, U(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m).$$

Statt dessen kann ich schreiben

(15) $F(x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow U(x_1, \ldots, x_n, y, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)})$,

wobei $(z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)})$ das lexikographisch kleinste unter den zulässigen m-tupeln $(z_1, \ldots, z_m)$ ist. In U kommt eine Anzahl l von Aussagen $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ vor (mitunter ist, wie früher bemerkt, $l = 0$); die l betreffenden $(n+1)$-tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ seien durch obere Indizes unterschieden, also als $\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}$ bezeichnet. Nach der Annahme gibt es für jedes i ein durch $\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}$ bestimmtes μ_i derart, daß die Formel

(16) $F(\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}) \& A(\nu, M) \& (\nu \geqq \mu_i) \to ((\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}) \in M)$
gilt. Nun setze ich

(17) $$\mu = \max(\mu_1, \ldots, \mu_l, x_1, \ldots, x_n, y).$$

Dann ist μ eine durch $x_1, \ldots, x_n, y$ allein bestimmte Zahl; denn jedes μ_i ist durch $\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}$ bestimmt, die aber wiederum als gewisse Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, y, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}$ gegeben sind, und $z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}$ sind durch $x_1, \ldots, x_n, y$ bestimmt. Ist $\nu \geqq \mu$, so ist nach (17) $\nu \geqq \mu_i$ für alle i, und folglich gilt für alle i

$$A(\nu, M) \& (\nu \geqq \mu) \to (F(\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}) \to ((\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}) \in M)).$$

Hieraus folgt, da U durch Konjunktion und Disjunktion allein aufgebaut ist,

$$A(\nu, M) \& (\nu \geqq \mu) \to (U(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \to U_*(x_1, \ldots, z_m^{(0)}))$$

oder

(18) $U(x_1, \ldots, x_n, y, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}) \& A(\nu, M) \& (\nu \geqq \mu) \to$
$\to U_*(x_1, \ldots, x_n, y, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}).$

Aus (17) folgt aber auch $(\nu \geqq \mu) \to (x_1 \leqq \nu) \& \ldots \& (x_n \leqq \nu) \& (y \leqq \nu)$. Deshalb folgt aus (18) offenbar

(19) $U(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \& A(\nu, M) \& (\nu \geqq \mu) \to$
$\to U_*(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \& (x_1 \leqq \nu) \& \ldots \& (x_n \leqq \nu) \& (y \leqq \nu).$

Zufolge 2) hat man indessen

(20) $U_*(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \& (x_1 \leqq \nu) \& \ldots \& (x_n \leqq \nu) \& (y \leqq \nu) \to$
$\to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M).$

Aus (19) und (20) bekommt man

(21) $U(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \& A(\nu, M) \& (\nu \geqq \mu) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M).$

Andererseits bekommt man aus (15)

(22) $F(x_1, \ldots, x_n, y) \& A(\nu, M) \& (\nu \geqq \mu) \to$
$\to (U(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \& A(\nu, M) \& (\nu \geqq \mu))$

und aus (21) und (22) wieder

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) \& A(\nu, M) \& (\nu \geqq \mu) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M),$$

was mit der Behauptung übereinstimmt. Hierdurch ist I bewiesen[6]).

B e w e i s v o n II. Es sei M_ν die Menge aller $(n+1)$-tupel $(x_1, \ldots, x_n, y)$, für welche $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ wahr ist, und außerdem $x_1, \ldots, x_n, y$ alle $\leqq \nu$ sind. Dann ist $A(\nu, M_\nu)$ eine richtige

[6]) In der erklärten lexikographischen Anordnung bilden ja die n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ eine wohlgeordnete Menge.

Aussage. In der Tat ist es sofort klar, daß 1) gilt, wenn M_ν statt M geschrieben wird. Daß auch 2) gilt, erkennt man so. Es sei für gewisse Zahlen $x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m$ die Aussage

$$U_*(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m) \,\&\, (x_1 \leqq \nu) \,\&\ldots\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu)$$

wahr. Aus $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta) \in M_\nu$ folgt $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$, und deshalb folgt $U(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m)$ aus $U_*(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m)$. Also gilt

$$U(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m) \,\&\, (x_1 \leqq \nu) \,\&\ldots\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu),$$

woraus zufolge (12)

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, (x_1 \leqq \nu) \,\&\ldots\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu),$$

woraus $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M_\nu$. Also ist 2) und also auch $A(\nu, M_\nu)$ richtig.

Nun hat man

$$(M)\big(A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big) \to \big(A(\nu, M_\nu) \to ((x_1, \ldots, x_1, y) \in M_\nu)\big),$$

woraus, da $A(\nu, M_\nu)$ richtig ist,

(23) $\quad (M)\big(A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M_\nu),$

und andererseits hat man nach der Definition von M_ν augenscheinlich

(24) $\quad ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M_\nu) \to F(x_1, \ldots, x_n, y),$

und aus (23) und (24) folgt die Richtigkeit von II.

Nun ist offenbar die Implikation

(25) $\quad (E\mu)(\nu, M)\big((\nu \geqq \mu) \,\&\, A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big) \to$
$$\to (E\mu)(M)\big(A(\mu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big)$$

richtig, und aus II folgt andererseits

(26) $\quad (E\mu)(M)(A(\mu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)) \to F(x_1, \ldots, x_n, y).$

Aus (25) und (26) folgt

II′. $\quad (E\mu)(\nu, M)\big((\nu \geqq \mu) \,\&\, A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big) \to$
$$\to F(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Aus I und II′ folgt, daß $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ äquivalent ist mit der Aussage

$$(E\mu)(\nu, M)\big((\nu \geqq \mu) \,\&\, A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big).$$

Stellt nun wie früher $A^*(\nu, u)$ die Aussage dar, die aus $A(\nu, M)$ erhalten wird, wenn M durch die Zahlvariable u ersetzt wird, während jede Beziehung $(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in M$ durch $\varepsilon(t_1, \ldots, t_{n+1}, u) = 1$ ersetzt wird, so ist also $F(x_1 \ldots, x_n, y)$ auch mit der Aussage

$$(27)\qquad (E\mu)(v, u)\big((v \geqq \mu) \,\&\, A^*(v, u) \to (\varepsilon(x_1, \ldots, x_n, y, u) = 1)\big)$$

äquivalent. Diese Aussage ist aber eine „arithmetische"; denn abgesehen von den Aussagen der Form $\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta, u) = 1$ kommen in U_* und also in $A^*(v, u)$ nach der Voraussetzung bloß früher bekannte „arithmetische" Aussagenfunktionen vor. Außerdem ist $\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta, u) = 1$ eine „arithmetische" Aussagenfunktion von $x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m$, weil nach Voraussetzung $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta$ sämtlich solche zahlentheoretische Funktionen von $x_1, \ldots, z_m$ sind, daß

$$\xi_1 = f_1(x_1, \ldots, z_m), \ldots, \xi_n = f_n(x_1, \ldots, z_m),\quad \eta = f(x_1, \ldots, z_m)$$

„arithmetische" Beziehungen sind. Wenn man will, kann man ja statt $\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta, u) = 1$

$$(E\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)\,[(\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta, u) = 1) \,\&$$
$$\& \,(\xi_1 = f_1(x_1, \ldots, z_m)) \,\&\, \ldots \,\&\, (\eta = f(x_1, \ldots, z_m))]$$

schreiben. Hierdurch ist die Richtigkeit des Satzes vollständig bewiesen.

Man erkennt leicht, daß der Beweis nicht mehr durchführbar ist, wenn in U auch negierte F vorkommen; die Implikation $U \to U_*$ (vgl. S. 84.) ist nämlich dann nicht mehr beweisbar. In der Tat gilt der Satz dann auch nicht mehr. In einem Briefe hat mir nämlich Herr L. Kalmár in Szeged einen Beweis dafür mitgeteilt, daß hinreichend weitläufige Rekursionen mit gebundenen Variablen nicht mehr zu „arithmetischen" Aussagenfunktionen führen. Das Kalmársche Beispiel ist eine Rekursion der Form

$$(28)\qquad H(n, x) \begin{cases} \rightleftarrows G\left(\frac{n}{3}, x\right), & \text{falls } n \equiv 0 \pmod 3 \\ \rightleftarrows (y)\, H\left(\left[\frac{n}{3}\right], u(x, y)\right), & \text{falls } n \equiv 1 \pmod 3 \\ \rightleftarrows (Ey)\, H\left(\left[\frac{n}{3}\right], u(x, y)\right), & \text{falls } n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

wobei $u(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + \binom{x}{1}$ ist, und G eine gewisse früher konstruierte „arithmetische" Aussagenfunktion ist, nämlich eine solche, daß unter $G(1, x), G(2, x), \ldots, G(n, x), \ldots$ sämtliche „arithmetische" Aussagenfunktionen ohne gebundene Variablen und mit x als einzigen freien Variablen vorkommen. Man bemerkt aber, daß in (28) rechts sowohl Allzeichen wie Seinszeichen auftreten. Man kann nun (28) durch eine andere Rekursion ersetzen derart, daß rechts nur Seinszeichen auftreten. Definiert man nämlich die Aussagenfunktion K so:

$$(29) \qquad \begin{aligned} &K(3m, x) \rightleftarrows H(3m, x) \\ &K(3m+1, x) \rightleftarrows \overline{H}(3m+1, x) \\ &K(3m+2, x) \rightleftarrows H(3m+2, x), \end{aligned}$$

so kann (28) ersetzt werden durch

$$(30) \qquad K(n, x) \begin{cases} \rightleftarrows G\left(\frac{n}{3}, x\right), & \text{wenn } n \equiv 0 \pmod 3 \\ \rightleftarrows (Ey)\,\overline{H}\left(\left[\frac{n}{3}\right], u(x, y)\right), & \text{wenn } n \equiv 1 \pmod 3 \\ \rightleftarrows (Ey)\,H\left(\left[\frac{n}{3}\right], u(x, y)\right), & \text{wenn } n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

und in den beiden letzten Äquivalenzen ist rechts H durch K zu ersetzen zufolge der Beziehung (29). D. h. ist $\left[\frac{n}{3}\right] \equiv 0$ oder $\left[\frac{n}{3}\right] \equiv 2$ (mod 3), so steht in den beiden letzten Äquivalenzen (30) einfach K statt H; ist aber $\left[\frac{n}{3}\right] \equiv 1$ (mod 3), so steht $\overline{K}$ statt H. Augenscheinlich ist (30) eine Rekursion, worin nur Seinszeichen rechts auftreten; es tritt aber die Negation der zu definierenden Funktion K im definiens auf. Es ist also klar, daß die Voraussetzung im obigen Satz, daß U durch Konjunktion und Disjunktion allein aufgebaut war, nicht vernachlässigt werden kann, ohne daß der Satz aufhört richtig zu sein.

Auf die Tatsache, daß hinreichend weitlaufige Rekursionen mit gebundenen Variablen, nicht mehr „arithmetische" Beziehungen zu liefern brauchen, hat schon P. Bernays in seiner Arbeit „Quelques points essentiels de la métamathématique"[7]) aufmerksam gemacht. Das Beispiel, das er dort erwähnt, ist aber zu einfach. Er stellt die folgende Definition einer Aussagenfunktion ψ auf:

$$\begin{aligned} &\psi(k, 0) \rightleftarrows \mathfrak{A}(k) \\ &\psi(k, n+1) \rightleftarrows (Ex)\,(\psi(x, n) \,\&\, \mathfrak{B}(k, x, n)). \end{aligned}$$

Nach dem oben bewiesenen Satze liefert aber diese Rekursion nur eine „arithmetische" Aussagenfunktion ψ, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ solche sind.

---

[7]) *L'Enseignement Mathématique,* **34** (1935), p. 70—95, insb. p. 90.

Jedoch scheint es, daß auch jede Rekursion, worin gebundene Variablen auftreten, zu einer „arithmetischen“ Aussagenfunktion führt, wenn die rechts auftretenden früher bekanten Aussagenfunktionen alle aus einstelligen aufgebaut sind, und auch noch in vielen anderen Fällen. Vielleicht werde ich bei einer anderen Gelegenheit näher darauf eingehen.

Diese Tatsache, daß Rekursionen mit gebundenen Variablen nicht mehr zu „arithmetischen“ Beziehungen zu führen brauchen, zeigt eine gewisse Unvollständigkeit der „gewöhnlichen“ Arithmetik. Dabei bedeutet „gewöhnliche Arithmetik“ die Theorie, die entsteht, wenn man den gewöhnlichen Prädikatenkalkül mit den Axiomen der Gleichheit, den einfachen Anordnungsaxiomen der ganzen Zahlen, den rekurrierenden Axiomen der Addition und Multiplikation samt dem Axiom der vollständigen Induktion (eigentlich den Axiomen, welche daraus entstehen durch alle möglichen Einsetzungen für die Funktionsvariable) kombiniert. Innerhalb dieser Theorie ist also nicht jede rekursive Definition durch eine explizite ersetzbar. Es kann dann vielleicht von Interesse sein zu bemerken, daß die Mengenlehre, etwa die Fraenkelsche oder die präzisierte Zermelosche, eine solche Unvollständigkeit nicht besitzt. In der Mengenlehre ist in der Tat jede rekursive Definition in trivialer Weise durch eine explizite ersetzbar, d. h. die rekursiven Definitionen sind überhaupt überflüssig. Betrachtet man z. B. die rekursive Definition einer Aussagenfunktion $\psi(x, y)$ innerhalb der Zermeloschen Zahlenreihe Z_0, d. h. 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}, \ldots$, so ist diese mit der rekursiven Definition einer gewissen Menge ψ von Paaren aus Z_0 gleichbedeutend. Bezeichne ich die Definition kurz durch Δ, so kann ich aber zuerst die Menge M aller Mengen m, für welche die Aussage Δm gilt, betrachten; offenbar ist M explizit definiert. Nun enthält aber M nur ein einziges Element, nämlich die Menge ψ; denn die Definition Δ kann nicht für zwei verschiedene Mengen gelten. Aber dann ist z. B. die zu M gehörige Vereinigungsmenge σM nichts anderes als die Menge ψ, welche also hierdurch explizit definiert ist.

(Eingegangen am 27. März 1936.)

Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge.

Von LEOPOLD FEJÉR in Budapest.

Einleitung.

1. In einigen neuerdings veröffentlichten Arbeiten (FEJÉR 2, 3, 4, und FEJÉR—SZEGŐ 5) bin ich u. A. zum Ergebnis gelangt, daß Potenzreihen und trigonometrische Reihen mit *totalmonotoner*[1]) Koeffizientenfolge gewisse *Eigenschaften* haben, die auch dann noch bestehen bleiben, wenn die Ordnung der Monotonie der Koeffizientenfolge nicht unendlich[2]), sondern eine gewisse *endliche* ganze Zahl ist. Ist nun einmal das Resultat gewonnen, daß eine Eigenschaft für Reihen, deren Koeffizientenfolge k-fach monoton ist, feststeht, so wird man in jedem einzelnen Falle zur interessanten Frage geführt: welches ist der *kleinste* Wert der Monotonieordnung k der Koeffizientenfolge der Reihe, für den die betreffende Eigenschaft noch allgemein gültig bleibt. Um das soeben

---

[1]) Ist $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ eine unendliche Zahlenfolge, so lautet die zu ihr gehörige unendliche quadratische Matrix der Differenzen

$$\Delta^{(\nu)} c_n = c_n - \binom{\nu}{1} c_{n+1} + \binom{\nu}{2} c_{n+2} - \ldots + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} c_{n+\nu},$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots.$$

($\Delta^{(0)} c_n$ bedeutet c_n selbst). Ist nun $\Delta^{(\nu)} c_n \geqq 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$, so heißt die Folge $\{c_n\}$ *k-fach monoton*. Ist aber $\Delta^{(\nu)} c_n \geqq 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, so heißt die Folge $\{c_n\}$ *totalmonoton*, oder auch vollmonoton.

Der triviale Fall $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \ldots = 0$ sei immer ausgeschlossen.

[2]) Ist die Ordnung der Monotonie der Koeffizientenfolge unendlich, so sind die in Frage stehenden Sätze oft (aber nicht immer) geradezu evident auf Grund der sogleich zu nennenden, allerdings tiefliegenden Hausdorff—Stieltjesschen Darstellung von Potenzreihen mit totalmonotoner Koeffizientenfolge.

gesagte zu erläutern, führe ich zunächst einige Resultate an, die ich in meinen obenerwähnten Arbeiten bewiesen habe.

Satz I. *Ist in der Potenzreihe*

$$f(z)=c_1z+c_2z^3+c_3z^5+\ldots+c_nz^{2n-1}+\ldots \tag{1}$$

die Koeffizientenfolge $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ *dreifach monoton, so ist die Reihe für* $|z|<1$ *konvergent und schlicht.*

Es gibt Potenzreihen vom Typus (1) *mit zweifach monotoner Koeffizientenfolge* $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$, *für welche* $f(z)$ *für* $|z|<1$ *nicht schlicht ist.*[3]) (FEJÉR **2.**)

Etwas einfacher ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz II. *Ist in der Potenzreihe*

$$f(z)=c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots+c_nz^n+\ldots \tag{2}$$

die Koeffizientenfolge $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ *vierfach monoton*[4]), *so ist die Reihe für* $|z|<1$ *konvergent und schlicht.*

Es gibt Potenzreihen vom Typus (2), *deren Koeffizientenfolge einfach monoton ist und für welche* $f(z)$ *für* $|z|<1$ *nicht schlicht ist.*[5]) (FEJÉR **2.**)

---

[3]) Eine solche Potenzreihe ist z. B.

$$f(z)=2z+z^3;$$

hier ist die Koeffizientenfolge

$$2, 1, 0, 0, 0, \ldots$$

zweifach monoton und $f(z)$ ist für $|z|<1$ nicht schlicht, weil $f'(z)=2+3z^2$ für $|z|<1$ verschwindet.

[4]) In der Arbeit von Herrn J. W. ALEXANDER (ALEXANDER **1**) findet man den Satz, daß $w=f(z)=c_1z+c_2z^2+\ldots$ für $|z|<1$ schlicht ist, wenn die Folge $\{nc_n\}$ einfach monoton ist. Ich kann beweisen, daß das von $w=f(z)$ in der w-Ebene entworfene Bild schlicht und zugleich i. B. auf den Nullpunkt $w=0$ sternförmig ist, wenn $\{nc_n\}$ zweifach monoton ist. (S. §. 3 vorliegender Arbeit.)

[5]) Z. B. ist in

$$f(z)=z+z^2+\ldots+z^n$$

die Koeffizientenfolge

$$1, 1, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots$$

einfach monoton und $f(z)$ ist (wenn $n\geqq 2$) nicht schlicht für $|z|<1$, weil

$$f'(z)=1+2z+3z^2+\ldots+nz^{n-1}$$

$(n-1)$ Nullstellen hat, die im Einheitskreise $|z|<1$ liegen. Übrigens ist auch

$$\varphi(z)=\frac{1+z+z^2}{1-az^3}=1+z+z^2+az^3+az^4+az^5+a^2z^6+\ldots$$

nicht schlicht für $|z|<1$, wenn nur der positive Parameter a hinreichend klein ist. Tatsächlich ist

$$\varphi'(z)=\frac{(1+2z)(1-az^3)+3az^2(1+z+z^2)}{(1-az^3)^2}.$$

(Fortsetzung der Fussnote auf S. 91)

Über die Folge der Reste habe ich den folgenden Satz gefunden:

Satz III. *Ist in der Potenzreihe*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{3}$$

die Koeffizientenfolge $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *dreifach monoton, so gilt im ganzen Einheitskreise*[6]) $|z| < 1$

$$|f(z)| = |R_0(z)| \geqq |R_1(z)| \geqq \ldots \geqq |R_n(z)| \geqq \ldots, \tag{4}$$

wo

$$R_n(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu z^\nu. \tag{5}$$

Es gibt Potenzreihen (3) *mit einfach monotoner Koeffizientenfolge* $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, *für welche die unendliche Ungleichungskette* (4) *nicht gültig ist.*[7]) (Fejér 3 und Fejér—Szegő 5.)

Endlich sei noch ein Satz über die „Legendreschen Polynome" einer Potenzreihe angeführt:

Für $a = 0$ verschwindet $\varphi'(z)$ an der Stelle $z = -\frac{1}{2}$, folglich für hinreichend kleine positive Werte von a in der Umgebung von $z = -\frac{1}{2}$.

[6]) Daraus folgt für die Partialsummen $s_n(z)$ der Reihe (3) die Abschätzung

$$|s_n(z)| \leqq 2\,|f(z)|,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots; \ |z| < 1.$$

Diese Abschätzung ist insofern beachtenswert, als $|s_n(z)|$ hier durch den Wert von $|f(z)|$ *an der Stelle z selbst* nach oben abgeschätzt wird (und *nicht* etwa durch das *Maximum* von $|f(z)|$ am Kreise $|z| =$ Const., der durch den Punkt z geht). Die Abschätzung $|s_n(z)| \leqq 2\,|f(z)|$ ist schon in der Arbeit Fejér (2) zu finden.

[7]) Z. B. ist in der Potenzreihe

$$f(z) = \frac{1+z}{1-az^2} = 1 + z + az^2 + az^3 + a^2 z^4 + a^2 z^5 + \ldots$$

die Koeffizientenfolge einfach monoton, wenn a eine feste positive Konstante < 1 bezeichnet, während der Quotient

$$\frac{R_{2\nu+1}(z)}{R_{2\nu}(z)} = z\frac{1+az}{1+z}$$

(der hier von ν unabhängig ist) dem absoluten Betrage nach größer ist als 1, wenn z in einem gewissen Teile des Einheitskreises $|z| < 1$ liegt. Ähnlicher Sachverhalt bei

$$\varphi(z) = \frac{1+z+z^2}{1-az^3} = 1 + z + z^2 + az^3 + az^4 + az^5 + \ldots.$$

Satz IV. *Ist in der Potenzreihe*

(6) $$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$$

die Koeffizientenfolge $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *totalmonoton und*

(7) $$|f(re^{i\theta})|^2=P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)r+\ldots+P_n(\cos\theta)r^n+\ldots,$$

so sind die arithmetischen Mittel erster Ordnung der durch die „Legendreschen Polynome" $P_n(\cos\theta)$ · *gebildeten unendlichen Reihe*

(8) $$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)+\ldots+P_n(\cos\theta)+\ldots$$

für jedes reelle θ *nichtnegativ.* (FEJÉR 3.)

2. Wir sehen nun zunächst, daß im Satze I $k=3$ die kleinste Monotonieordnung ist, mit welcher der Satz noch allgemein gültig bleibt. Hingegen ist im Satze III nicht $k=3$, sondern $k=2$ die kleinste zulässige Monotonieordnung, ein Resultat, das von SZEGÖ herrührt (FEJÉR—SZEGÖ 5). Es ist mir nun neuerdings gelungen, auch im Satze IV die Monotonieordnung der Koeffizientenfolge $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ von $k=\infty$ auf $k=2$ herunterzudrücken; es ist also der folgende Satz gültig:

Ist $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *eine nichtnegative, monoton fallende, von unten konvexe Zahlenfolge und* $P_0(\cos\theta), P_1(\cos\theta), \ldots, P_n(\cos\theta), \ldots$ *die entsprechende unendliche Folge der „Legendreschen Polynome", so sind die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Partialsummen der unendlichen Reihe*

$$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)+\ldots+P_n(\cos\theta)+\ldots$$

durchwegs nichtnegativ für jeden reellen Wert von θ.

Den äußerst einfachen Beweis dieses Satzes gebe ich im §. 5 vorliegender Arbeit.

Es ist mir nicht gelungen zu entscheiden, ob im Satze II die Monotonitätsordnung der Koeffizientenfolge $k=4$ durch eine kleinere ersetzt werden kann oder nicht.[8]) Indessen stieß ich doch auf verschiedene Resultate, von welchen ich einige, da ich sie in der Literatur nicht vorfinden konnte, in dieser Arbeit mitteilen möchte. Das folgende einfache Resultat bezieht sich auf den Fall, in welchem die Variable z nur *reelle* Werte annimmt (und deshalb jetzt mit x bezeichnet werde) und lautet folgendermaßen (s. §. 1):

---

[8]) Ist diese Ordnung $k=2$, so ist $f(z)$ „schlicht" auf dem *Durchmesser* von (-1) bis $(+1)$ und auf dem Durchmesser von $(-i)$ bis $(+i)$ des Einheitskreises. Dies folgt leicht aus dem Satze V vorliegender Arbeit.

Ist in der Potenzreihe

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

die Koeffizientenfolge $(k+1)$-fach monoton, so ist sie für $-1 < x < 1$ konvergent, und es ist

$$f(x) \geqq 0,\ f'(x) \geqq 0,\ f''(x) \geqq 0, \ldots, f^{(k)}(x) \geqq 0.$$

Diese Aussage ist für $0 \leqq x < 1$ natürlich trivial; sie ist nur für das Intervall $-1 < x < 0$ wesentlich.

§. 2 handelt über die Eigenschaften der transformierten Reihen, §. 3 über die Sternförmigkeit und Konvexität, §. 4 über die Eigenschaften der Restenfolge einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, für welche die Folge $\{c_n\}$ (oder $\{nc_n\}$, oder auch $\{n^2 c_n\}$) eine gewisse Ordnung der Monotonie besitzt.

§. 1.

Über die Ableitungen im Intervalle $-1 < x < 1$ einer Potenzreihe mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge.

1. Satz V. *Ist in der Potenzreihe*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

die Koeffizientenfolge $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ $(k+1)$-fach monoton, so ist sie für $-1 < x < 1$ konvergent und es ist

$$f(x) \geqq 0,\ f'(x) \geqq 0,\ f''(x) \geqq 0, \ldots, f^{(k)}(x) \geqq 0$$

im ganzen Intervalle[9]) $-1 < x < 1$.

---

[9]) Ist also in der Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ *totalmonoton*, so ist $f^{(k)}(x) \geqq 0$ für *jedes* nichtnegative ganzzahlige k gültig im Intervalle $-1 < x < 1$. *Dieser* Satz ist eine unmittelbare Folge der Stieltjes—Hausdorffschen Darstellung

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d\varphi(t)}{1 - tx},$$

aus welcher die Formel

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \int_0^1 \frac{t^k d\varphi(t)}{(1 - tx)^{k+1}}$$

folgt, woraus wieder ersichtlich ist, daß (für das analytisch fortsetzbare $f(x)$) sogar im Intervalle $-\infty < x < 1$ $f^{(k)}(x) \geqq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, gültig ist. (Hier bezeichnet $\varphi(t)$ eine im Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ definierte beschränkte, daselbst

2. Erster Beweis. Dieser stützt sich auf eine Eigenschaft der Partialsummen höherer Ordnung (oder iterierten Partialsummen) der geometrischen Reihe

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, \tag{2}$$

die ich zunächst auseinandersetzen möchte.

In meinen Untersuchungen über Fouriersche Reihen und Potenzreihen kommt zumeist das Verhalten der Partialsummen höherer Ordnung der geometrischen Reihe (oder ihrer derivierten Reihen) *auf dem Einheitskreise* $|x|=1$ *der komplexen x-Ebene* in Betracht. Meine diesbezüglichen Resultate sind in den §§. II und III meiner Abhandlung Fejér 2 zusammengefaßt und werden in den folgenden Paragraphen vorliegender Arbeit auch ausgiebig benützt. Hier, im §. 1, sollen diese höheren Partialsummen (oder, was auf dasselbe hinauskommt: die höheren Cesàroschen Mittel) der geometrischen Reihe auf dem reellen Durchmesser $-1<x<1$ des Einheitskreises $|x|<1$ betrachtet werden.

Die höheren Partialsummen der geometrischen Reihe (2) seien, wie gewöhnlich, durch

$$\begin{aligned}
&s_n^{(0)}(x)=1+x+\ldots+x^n\\
&s_n^{(1)}(x)=s_0^{(0)}(x)+s_1^{(0)}(x)+\ldots+s_n^{(0)}(x)\\
&s_n^{(2)}(x)=s_0^{(1)}(x)+s_1^{(1)}(x)+\ldots+s_n^{(1)}(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_n^{(\nu)}(x)=s_0^{(\nu-1)}(x)+s_1^{(\nu-1)}(x)+\ldots+s_n^{(\nu-1)}(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

definiert und bezeichnet. Da die erzeugende Funktion der geometrischen Reihe (2), wenn z die Variable der erzeugenden Funk-

---

niemals abnehmende Funktion von t mit $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)<\varphi(1)$). Aus der obigen Formel können wir noch entnehmen, daß die Folge $\left\{\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right\}$, $k=0,1,2,\ldots$, totalmonoton ist, wenn x eine beliebige, aber feste Stelle der negativen Achse $-\infty<x<0$ bezeichnet. Es gilt also der folgende Satz: Wenn für eine analytische Funktion an der regulären Stelle $x=0$ die Folge $\left\{\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right\}$, $n=0,1,2,\ldots$, totalmonoton ist, so ist diese Folge auch für die negative Achse $-\infty<x<0$ (entlang welcher sie infolgedessen analytisch fortsetzbar ist) totalmonoton. Ich verweise hier auf die Note von G. Pólya (9), in welcher bemerkenswerte Eigenschaften von Potenzreihen mit totalmonotoner Koeffizientenfolge angegeben sind.

tion bezeichnet,

(4) $$\frac{1}{1-xz} = 1 + xz + x^2z^2 + \ldots + x^nz^n + \ldots$$

lautet, so ist die erzeugende Funktion der Partialsummen ν-ter Ordnung $s_0^{(\nu)}(x)$, $s_1^{(\nu)}(x), \ldots$ der geometrischen Reihe

(5) $$\frac{1}{(1-z)^{\nu+1}} \frac{1}{1-xz} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(\nu)}(x) z^n .$$

Indem wir nun auf beiden Seiten der Gleichung (5) den ν-ten Differentialquotienten nach x nehmen, erhalten wir

(6) $$\frac{\nu!\, z^\nu}{(1-z)^{\nu+1}\,(1-xz)^{\nu+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^\nu}{dx^\nu} s_n^{(\nu)}(x) \,.\, z^n .$$

Da $\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_n^{(\nu)}(x)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, (\nu - 1)$ natürlich identisch verschwindet, so erhalten wir aus (6), indem wir auf beiden Seiten durch z^ν dividieren:

(7) $$\frac{\nu!}{((1-z)(1-xz))^{\nu+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^\nu}{dx^\nu} s_{\nu+n}^{(\nu)}(x)\, z^n .$$

Es sei nun *erstens*: $0 < x < 1$. Da $(1-z)^{-1}$ nach z entwickelt durchwegs positive Koeffizienten besitzt und da dasselbe, wegen $0 < x < 1$, auch für $(1-xz)^{-1}$ gültig ist, so ergibt die Gleichung (7) zunächst das triviale Resultat $\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_{\nu+n}^{(\nu)}(x) > 0$, für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Es sei nun *zweitens* $-1 < x < 0$. Da $(1-z)(1-xz) = 1 - [(1+x)z - xz^2]$, und da hier die Koeffizienten von z und z^2, d. h. $(1+x)$ und $(-x)$ nach Voraussetzung *positive* Zahlen sind (deren Summe übrigens gleich 1 ist), so sind in der Entwickelung von $(1 - [(1+x)z - xz^2])^{-1}$ nach Potenzen von z, also auch in der Entwickelung von $(1 - [(1+x)z - xz^2])^{-(\nu+1)}$ nach Potenzen von z, die Koeffizienten durchwegs *positiv*. Ich habe also das Resultat erhalten, daß

(8) $$\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_n^{(\nu)}(x) \geqq 0$$

für

$$n = 0, 1, 2, \ldots; \; -1 < x < 1.$$

(Genauer: für $n = 0, 1, \ldots, (\nu - 1)$ ist der Differentialquotient identisch gleich 0, für $n = \nu, (\nu + 1), \ldots$ ist er positiv im ganzen

Intervalle $-1<x<1$.) Ist nun $\mu>\nu$, so ist, wegen (3), wieder

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_n^{(\mu)}(x) \geqq 0$$

gültig. Ich habe also den folgenden Satz erhalten:

Ist μ eine nichtnegative ganze Zahl und bezeichnet $s_n^{(\mu)}(x)$ die Partialsumme μ-ter Ordnung vom Index n der geometrischen Reihe

$$1+x+x^2+\ldots x^n+\ldots,$$

so ist

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_n^{(\mu)}(x) \geqq 0 \tag{9}$$

für

$$n=0, 1, 2, \ldots; \quad -1<x<1,$$

wenn

$$\nu=0, 1, 2, \ldots, \mu.$$

(Genauer: für $n=0, 1, 2, \ldots, (\nu-1)$ ist $\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_n^{(\mu)}(x) \equiv 0$, für $n=\nu, \nu+1, \nu+2, \ldots$ ist dieser Differentialquotient positiv im ganzen Intervalle $-1<x\leqq 1$.)

3. 1. Bemerkung. Da $S_n^{(\mu)}(x)=\dfrac{s_n^{(\mu)}(x)}{\binom{n+\mu}{\mu}}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, die Folge der Cesàroschen Mittelwerte μ-ter Ordnung der Partialsummen der geometrischen Reihe $1+x+x^2+\ldots$ repräsentiert, so ist auch für die Folge der ν-ten Derivierten dieser Cesàroschen Mittel die Ungleichung (9) gültig. Ich habe also erhalten, daß die Partialsummen der geometrischen Reihe für $-1<x<1$ positiv sind, daß ihre arithmetischen Mittelwerte erster Ordnung positiv und monoton wachsend sind für $-1<x<1$, daß ihre Mittelwerte zweiter Ordnung positiv, monoton wachsend und von unten konvex sind für $-1<x<1$, u. s. w. Je größer also die Ordnung μ des Cesàroschen Mittels $S_n^{(\mu)}(x)$ der geometrischen Reihe ist, umso mehr Differentialquotienten von $S_n^{'(\mu)}(x)$ sind positiv für $-1<x<1$. Die Differentialquotienten ihrer Grenzfunktion $\frac{1}{1-x}$ sind durchwegs positiv für $-1<x<1$.

2. Bemerkung. Die Entwickelung der erzeugenden Funktion

(10) $$\frac{\nu!}{(1-z)^{\nu+1}(1-xz)^{\nu+1}}=\frac{\nu!}{(1-[(1+x)z-xz^2])^{\nu+1}}$$

nach Potenzen von z (mit Hilfe der Binomialreihe $(1-u)^{-(\nu+1)}$) liefert einen interessanten Ausdruck für die Derivierten $\frac{d^\nu}{dx^\nu} s_{\nu+n}^{(\nu)}(x)$. Sie erscheinen als Polynome der beiden Argumente $(-x)$ und $1+x$, (oder, indem wir $x=-\xi$ einführen, von ξ und $1-\xi$). Diese expliziten Ausdrücke sollen indessen hier übergangen werden, da ich sie in dieser Arbeit nicht benötige.

4. Es sei nun

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

zunächst eine beliebige Potenzreihe, deren Konvergenzradius *größer* als 1 ist. Da jetzt a_n mit unendlich wachsendem n so stark zu Null konvergiert, daß für $n\to\infty$ auch $n^p a_n\to 0$, wie groß auch die feste positive Zahl p sei, so liefert die $(k+1)$-fache Abelsche Umformung für $f(x)$ die Entwickelung[10])

(11) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^{(k+1)}a_n s_n^{(k)}(x).$$

Hier bezeichnet $\Delta^{(k+1)}a_n$ die *Differenz* $(k+1)$-ter Ordnung von a_n, während $s_n^{(k)}(x)$ die Partial*summe* k-ter Ordnung der geometrischen Reihe $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ bezeichnet. Für jeden nichtnegativen ganzzahligen Wert von k enthält man eine solche Entwickelung (11) von $f(x)$. Wir haben die Funktion $f(x)$ nach den Partialsummen k-ter Ordnung $s_n^{(k)}(x)$ der geometrischen Reihe $1+x+x^2+\ldots$, d. h. nach den Polynomen

(12) $$s_n^{(k)}(x)=\binom{k+n}{k}+\binom{k+n-1}{k}x+\binom{k+n-2}{k}x^2+\ldots+x^n$$

entwickelt, eine Entwicklung, die für $-1\leqq x\leqq 1$ (ja sogar im Einheitskreise $|x|\leqq 1$ der komplexen x-Ebene) mit allen ihren Derivierten ebensowohl gleichmäßig konvergiert, wie die Potenz-

---

10) Gewöhnlich wird die umgekehrte Abelsche Umformung

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^{(k+1)}x^n\,.\,s_n^{(k)}=(1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{(k)}x^n$$

gebraucht, wo $s_n^{(k)}$ die Partialsumme k-ter Ordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ bezeichnet. Aus dieser Umformung ergeben sich die Potenzreihensätze von ABEL, FROBENIUS, HÖLDER, CESÀRO, u. s. w.

reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ selbst, mit allen ihren Derivierten. Es ist also für jeden nichtnegativen ganzzahligen Wert von ν

$$f^{(\nu)}(x) \equiv \frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{(k+1)} a_n \cdot \frac{d^\nu}{dx^\nu} s_n^{(k)}(x), \tag{13}$$

woraus, mit Rücksicht auf unser Lemma über die $s_n^{(k)}(x)$ der geometrischen Reihe, folgt, daß im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$

$$\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} \geqq 0 \tag{14}$$

ist für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$, wenn nur die Folge $\Delta^{(k+1)} a_n$ nichtnegativ ist.

5. Der allgemeine Fall läßt sich auf den soeben erledigten speziellen Fall reduzieren. Ist nähmlich $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ eine beliebige unendliche Folge, die $(k+1)$-fach monoton ist, d. h.

$$\Delta^{(p)} a_n \geqq 0, \tag{15}$$
$$p = 0, 1, 2, \ldots, (k+1); \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

dann ist bekanntlich auch die Folge $a_0, a_1 r, a_2 r^2, \ldots, a_n r^n, \ldots$ $(k+1)$-fach monoton, wenn r eine beliebige, aber feste positive Zahl des Intervalls $0 < r < 1$ bezeichnet. Also genügt

$$f(rx) = a_0 + a_1 r . x + a_2 r^2 . x^2 + \ldots + a_n r^n . x^n + \ldots \tag{16}$$

den Bedingungen des Spezialfalles und es ist also

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(rx) = r^\nu f^{(\nu)}(rx) \geqq 0,$$

d. h.

$$f^{(\nu)}(rx) \geqq 0$$

für

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, k; \; -1 \leqq x \leqq 1,$$

d. h.

$$f^{(\nu)}(x) \geqq 0$$

für

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, k; \; -r \leqq x \leqq r.$$

Da aber die letzte Ungleichung für jede positive Zahl r gültig ist, die kleiner als 1 ist, so haben wir endlich

$$f^{(\nu)}(x) \geqq 0 \tag{17}$$

für

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, k; \quad -1 < x < 1,$$

d. h. den Satz V erhalten.

6. Zweiter Beweis. Der erste Beweis zeigt, wie der Satz V mit einer elementaren Eigenschaft der Partialsummen höherer Ordnung der geometrischen Reihe *zusammenhängt.* Der zweite, hier folgende Beweis (der übrigens mit dem ersten verwandt ist,) ist kürzer (und hat sogar gewisse hier nicht zu erwähnende sachliche Vorteile).

Ist

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{18}$$

eine beliebige, für $-1 < x < 1$ konvergente Potenzreihe, so ist für diese Werte von x

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\ldots(n+k)\, a_{n+k} x^n. \tag{19}$$

Da der Satz V für positive Werte von x trivial ist, so setze ich gleich $(-x)$ an Stelle von x, wo x die Ungleichung $0 < x < 1$ befriedigt. Es ist

$$f^{(k)}(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)\ldots(n+k)\, a_{n+k} x^n. \tag{20}$$

Bezeichnen wir nun mit $\sigma_n^{(k)}$ die Partialsummen k-ter Ordnung der numerischen unendlichen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)\ldots(n+k) = \tag{21}$$
$$= 1 \,.\, 2 \ldots k - 2 \,.\, 3 \ldots (k+1) + \ldots,$$

so liefert eine $(k+1)$-fache Abelsche Umformung auf die rechte Seite von (20) angewendet:

$$f^{(k)}(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^{(k+1)}(a_{n+k} x^n) \,.\, \sigma_n^{(k)}. \tag{22}$$

Ich zeige nun zunächst, daß die numerische Folge $\{\sigma_n^{(k)}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *nichtnegativ* ist. Setzen wir in (18) $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 1$, so liefert (20)

$$\frac{k!}{(1+x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)\ldots(n+k)\, x^n, \tag{23}$$

so daß also

$$(24)\qquad \frac{1}{(1-x)^{k+1}}\cdot\frac{k!}{(1+x)^{k+1}}=\frac{k!}{(1-x^2)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(k)}x^n,$$

woraus sich die Nichtnegativität der Folge $\{\sigma_n^{(k)}\}$ unmittelbar ergibt.

Setzen wir nun voraus, daß die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $(k+1)$-fach monoton ist, so ist auch die Folge $\{a_{n+k}\}$, also bekanntlich auch die Folge $\{a_{n+k}x^n\}$ $(k+1)$-fach monoton. Also ist auch $\Delta^{(k+1)}(a_{n+k}x^n)\geqq 0$ für $n=0, 1, 2, \ldots$.

Auf Grund der Umformung (22) können wir also schließen, daß

$$f(x)\geqq 0,\ f'(x)\geqq 0, \ldots, f^{(k)}(x)\geqq 0 \text{ für } -1<x<0,$$

womit der Satz V von neuem bewiesen ist.

7. Der Satz V gestattet eine interessante Anwendung auf Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, deren Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ *einfach* monoton d. h. nichtnegativ und monoton abnehmend ist. Ich gebrauche folgendes Lemma:

Ist die Folge $\{a_n\}$ einfach monoton, d. h. ist $a_n\geqq 0$, $a_n\geqq a_{n+1}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, so ist die Folge $\{a_n r^n\}$ k-fach monoton, wenn $0\leqq r\leqq \frac{1}{k}$.

Beweis. Es ist

$$(25)\qquad \begin{aligned}\Delta^{(\nu)}(a_n r^n) &= a_n r^n-\binom{\nu}{1}a_{n+1}r^{n+1}+\binom{\nu}{2}a_{n+2}r^{n+2}-\\ &\qquad -\ldots+(-1)^\nu a_{n+\nu}r^{n+\nu}=\\ &= r^n\left\{a_n-\binom{\nu}{1}a_{n+1}r+\binom{\nu}{2}a_{n+2}r^2-\ldots+(-1)^\nu a_{n+\nu}r^\nu\right\}.\end{aligned}$$

Es sei nun r im Intervalle $0\leqq r\leqq\frac{1}{\nu}$ enthalten, d.h. $r=\frac{\theta}{\nu}$, wo θ eine feste Zahl mit $0\leqq\theta\leqq 1$ bezeichnet. Dann liefert (25)

$$\begin{aligned}\Delta^{(\nu)}(a_n r^n) = r^n\Big\{a_n &-\frac{\nu}{\nu}a_{n+1}\theta+\frac{1}{1.2}\,\frac{\nu(\nu-1)}{\nu.\nu}a_{n+2}\theta^2-\\ &-\frac{1}{1.2.3}\,\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{\nu.\nu.\nu}a_{n+3}\theta^3+\\ &+\ldots+(-1)^\nu\frac{1}{1.2\ldots\nu}\,\frac{\nu(\nu-1)\ldots 1}{\nu.\nu\ldots\nu}a_{n+\nu}\theta^\nu\Big\}.\end{aligned}$$

Da nun die $(\nu+1)$ Addenden in der Klammer dem absoluten

Beträge nach stets abnehmen, ferner abwechselnd positiv und negativ sind, so ist also tatsächlich $\Delta^{(\nu)}(a_n r^n) \geqq 0$ für $n=0,1,2,\ldots$; $0 \leqq r \leqq \frac{1}{\nu}$. Dieses Ergebnis für $\nu=0,1,2,\ldots,k$ angewendet liefert das Lemma.

Nun sei $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine beliebige Potenzreihe mit einfach monotoner Koeffizientenfolge. Bezeichnet dann r eine feste Zahl des Intervalles $0<r<\frac{1}{k+1}$, so hat die Potenzreihe $f(rx)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n . x^n$ nach unserem Lemma eine $(k+1)$-fach monotone Koeffizientenfolge $\{a_n r^n\}$. Nach dem Satze V ist aber dann

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(rx) = r^\nu f^{(\nu)}(rx) \geqq 0$$

für

$$\nu=0,1,2,\ldots,k; \; -1<x<1,$$

also ist

$$f^{(\nu)}(x) \geqq 0$$

für

$$\nu=0,1,2,\ldots,k; \; -\frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k+1}.$$

Da, wegen der Nichtnegativität der Folge $\{a_n\}$, $f^{(\nu)}(x) \geqq 0$ ist für jedes ν und für das ganze Intervall $0 \leqq x<1$, so haben wir also den folgenden Satz erhalten:

Satz VI. *Ist in der Potenzreihe*

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{26}$$

die Koeffizientenfolge nichtnegativ und monoton abnehmend, d. h. $a_n \geqq 0$, $a_n \geqq a_{n+1}$, $n=0,1,2,\ldots$, *so ist für jeden nichtnegativen ganzzahligen Wert von* k

$$f^{(k)}(x) \geqq 0 \quad \textit{für} \quad -\frac{1}{k+1}<x<1. \tag{27}$$

8. 1. Bemerkung. Wir sehen, daß die Summe einer Potenzreihe, deren Koeffizientenfolge einfach monoton ist, nichtnegativ ist im Intervalle $-1<x<1$, monoton wachsend ist im Intervalle $-\frac{1}{2}<x<1$, von unten konvex ist im Intervalle $-\frac{1}{3}<x<1$, u. s. w.

2. Bemerkung. Der Satz VI läßt sich in gewissem Sinne nicht verschärfen. Tatsächlich ist für die Potenzreihe

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + x^{k+1} + 0 \,.\, x^{k+2} + 0 \,.\, x^{k+3} + \ldots$$
$$f^{(k)}(x) = k! + (k+1)!\, x = k!\,(1 + (k+1)\,x),$$

und $f^{(k)}(x)$ ist im ganzen Intervalle $-1 < x < -\frac{1}{k+1}$ *negativ.*

3. Bemerkung. Wir haben soeben gesehen, daß eine Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, deren Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ einfach monoton ist, im ganzen Intervalle $-1 < x < 1$ positiv ist, und im Intervalle $-\frac{1}{2} < x < 1$ monoton wächst. Dieser Satz läßt zu, daß ein solches $f(x)$ im Intervalle $-1 < x < -\frac{1}{2}$ beliebig viele Maxima und Minima habe. Ich habe ein Beispiel gefunden (übrigens ein Polynom 5-ten Grades), bei welchem $f(x)$ im Intervalle $-1 < x < -\frac{1}{2}$ ein Maximum und ein Minimum besitzt. Es ist mir aber nicht gelungen eine unendliche Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ mit nichtnegativen monoton abnehmenden Koeffizienten zu konstruieren, die im Intervalle $-1 < x < -\frac{1}{2}$ *unendlich viele* Maximum- und Minimumstellen besäße (die natürlich den Punkt -1 zur Häufungsstelle haben müßten).

§. 2.

Über die Eigenschaften der Transformierten einer Potenzreihe mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge.

1. Um eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n z^n \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten auf der reellen z-Achse von (-1) bis $(+1)$ zu untersuchen, haben wir die „transformierten Reihen“

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{(\nu)} a_n \,.\, s_n^{(\nu-1)}(z), \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

eingeführt, wo $\{\Delta^{(\nu)} a_n\}$ die ν-te Differenzenfolge der Koeffizientenfolge $\{a_n\}$, $\{s_n^{(\nu-1)}(z)\}$ die $(\nu-1)$-te Summenfolge der geometrischen Reihe $1+z+z^2+\ldots$ darstellt. Wenn wir die Reihe (2), die ν-te *Transformierte* der Reihe (1), kurz durch $T_\nu(z)$ bezeichnen ($\nu=1,2,\ldots;\ T_0(z)=f(z)$), so lauten also die niedrigsten Transformierten ausführlicher:

$$\text{(I)}\quad T_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-a_{n+1})(1+z+\ldots+z^n),$$

$$\text{(II)}\quad T_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2})(n+1+nz+\ldots+z^n),$$

$$\text{(III)}\quad T_3(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-3a_{n+1}+3a_{n+2}-a_{n+3})\left(\binom{n+2}{2}+\binom{n+1}{2}z+\ldots+z^n\right),$$

$$\text{(IV)}\quad T_4(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-4a_{n+1}+6a_{n+2}-4a_{n+3}+a_{n+4})\left(\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{3}z+\ldots+z^n\right),$$

. . . .

Im §. 1 haben wir gesehen, daß die transformierten Reihen $T_\nu(z)$ durchwegs (mit allen ihren Derivierten) im Einheitskreise $|z|\leqq 1$ gleichmäßig konvergent sind und die Summe $f(z)$ haben, falls der Konvergenzradius der Potenzreihe (1) *größer ist als* 1.

Ich möchte hier nun den folgenden Satz erwähnen, dessen Beweis sich mit Hilfe der Formel für die k-fache Abelsche Umformung

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu u_\nu=\sum_{\nu=0}^{n-k}\Delta^{(k)}a_\nu\,.\,s_\nu^{(k-1)}+\sum_{\nu=n-k+1}^{n}\Delta^{(n-\nu)}a_\nu\,.\,s_\nu^{(n-\nu)},$$
$$(k=1,2,\ldots,n),$$

und mit Hilfe von Sätzen der Herren ANDERSEN und KNOPP **(7)** über die Ordnung des Unendlichkleinwerdens der höheren Differenzenfolgen einer mehrfach monotonen Zahlenfolge unschwer führen läßt.

Satz VII. *Ist die Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *der Potenzreihe* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ *k-fach monoton und ist* $\lim_{n=\infty}a_n=0$, *so ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ *mit ihren Transformierten* $T_1(z), T_2(z),\ldots, T_k(z)$ *für* $|z|<1$ *konvergent (für* $|z|\leqq\varrho<1$ *sogar gleichmäßig konvergent)* *und es ist*

(3) $$f(z)=T_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^{(\nu)}a_n\,.\,s_n^{(\nu-1)}(z),$$
$$\nu=1,2,\ldots,k;\ |z|<1.$$

Allgemeiner: ist $\lim\limits_{n=\infty} a_n=a$, *so ist*

(4) $$f(z)=\frac{a}{1-z}+T_\nu(z)=\frac{a}{1-z}+\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^{(\nu)}a_n\,.\,s_n^{(\nu-1)}(z),$$
$$\nu=1,2,\ldots,k;\ |z|<1.$$

2. Zunächst habe ich über die Transformierte $T_4(z)$ etwas besonderes zu sagen. Ich habe gezeigt (s. z. B. FEJÉR **2**), daß die hier auftretenden Partialsummen dritter Ordnung $s_n^{(3)}(z)$ der geometrischen Reihe

$$s_n^{(3)}(z)=\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{3}z+\ldots+z^n,$$
$$n=1,2,3,\ldots,$$

nicht nur *schlicht* sind für $|z|\leqq 1$, sondern daß *ihr reeller Teil monoton abnimmt* $\left(\text{so wie der reelle Teil von } \dfrac{1}{1-z}\right)$, wenn z den oberen Halbkreis $z=re^{i\theta}$ ($0\leqq\theta\leqq\pi$; r fest und $0<r\leqq 1$) mit wachsendem θ durchläuft. Ist nun überhaupt $\varphi_1(z)$ eine für $|z|<1$ reguläre Funktion dieser Art mit reellen Koeffizienten (d. h. deren reeller Teil die soeben erwähnte Monotonitätseigenschaft besitzt, und die — wie leicht ersichtlich — infolgedessen für $|z|<1$ schlicht ist), und $\varphi_2(z)$ eine zweite, so ist auch $\varphi_1(z)+\varphi_2(z)$, folglich auch $c_1\varphi_1(z)+c_2\varphi_2(z)$ eine Funktion dieser Art, wenn $c_1\geqq 0$, $c_2\geqq 0$ (es sei denn, daß $c_1\varphi_1(z)+c_2\varphi_2(z)$ identisch konstant ist). Aus der Tatsache, daß die Funktionen $\varphi(z)$ eine solche *Unterklasse* der für $|z|<1$ regulären und schlichten Funktionen bilden, bei welcher die Summe von zwei Funktionen wieder zur Unterklasse selbst gehört, (wenn nur die Summe nicht identisch konstant ist) und aus dem über $s_n^{(3)}(z)$ Gesagten folgt dann auf Grund der Transformation für $\nu=4$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\frac{a}{1-z}+\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^{(4)}a_n\,.\,s_n^{(3)}(z),$$

daß die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ für $|z|<1$ regulär und schlicht ist, wenn die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ *vierfach* monoton ist. Dieser Satz ist mein alter Satz II, den ich in der Einleitung angeführt habe. Auf Grund des Vorhergehenden können wir nun auch den folgenden Satz formulieren:

Satz VIII. *Ist in der Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *die reelle Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *vierfach monoton, so ist die Potenzreihe für* $|z|<1$ *konvergent und schlicht. Weiter gilt für* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *die für* $|z|<1$ *konvergente (für* $|z|\leq \varrho<1$ *gleichmäßig konvergente) Entwickelung:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{a}{1-z} + \tag{5}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-4a_{n+1}+6a_{n+2}-4a_{n+3}+a_{n+4})\left(\binom{n+3}{3}+\right.$$
$$\left.+\binom{n+2}{3}z+\ldots+z^n\right),$$

die nach den Polynomen

$$s_n^{(3)}(z)=\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{3}z+\binom{n+1}{3}z^2+\ldots+z^n,$$

den Partialsummen dritter Ordnung der geometrischen Reihe $1+z+\ldots+z^n+\ldots$, *fortschreitet. Hier ist* $a=\lim_{n=\infty} a_n$. *In der Entwickelung auf der rechten Seite der Gleichung* (5) *ist jedes einzelne Glied, jede Teilsumme (ja sogar jedes lineare Aggregat der Glieder mit nichtnegativen Koeffizienten) schlicht für* $|z|<1$. (Identisch konstante Aggregate werden natürlich ausgenommen.)

3. Ich führe hier ferner noch zwei interessante unveröffentlichte Resultate von Herrn EGERVÁRY an. Wir erwähnten soeben, daß das Polynom

$$s_n^{(3)}(z)=\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{3}z+\binom{n+1}{3}z^2+\ldots+z^n \tag{6}$$
$$(n=1,2,3,\ldots)$$

vom abgeschlossenen Einheitskreise $|z|\leq 1$ ein Bild auf die $w=s_n^{(3)}(z)$ Funktionsebene entwirft, das 1. *schlicht* ist, 2. daß die Abszisse des Bildpunktes von $z=re^{i\theta}$ *monoton abnimmt*, wenn (bei festen r, $0<r\leq 1$), θ von 0 bis π monoton wächst. Herr EGERVÁRY hat nun gefunden, 3. daß das von $|z|\leq 1$ durch $w=s_n^{(3)}(z)$ auf die Funktionsebene entworfene Bild *konvex* ist. Wir können also zum Satze VIII noch hinzufügen, daß die *einzelnen Glieder* in der Entwicklung (5) (und überhaupt in jeder Entwicklung (IV))

ein schlichtes und konvexes Bild vom Einheitskreise $|z| \leqq 1$ auf die Funktionsebene w entwerfen (natürlich vorausgesetzt, daß das Glied nicht identisch konstant ist). Weiter hat Herr EGERVÁRY bewiesen, daß die Polynome $s_n^{(1)}(z) = (n+1) + nz + \ldots + z^n$ der Entwicklung (II) *schlicht* sind für $|z| < 1$. Weitergehendere Schlüsse kann man aber vorläufig (auf Grund der transformierten Reihen) nicht ziehen; sind nämlich $f_1(z)$ und $f_2(z)$ regulär und konvex für $|z| < 1$, so braucht natürlich im allgemeinen $f_1(z) + f_2(z)$ nicht konvex zu sein für $|z| < 1$. Sind weiter $f_1(z)$ und $f_2(z)$ regulär und schlicht für $|z| < 1$, so wird natürlich im allgemeinen $f_1(z) + f_2(z)$ nicht schlicht sein für $|z| < 1$ (wohl aber, wenn die Funktionen f_1, f_2 zur soeben definierten Unterklasse φ gehören).

§. 3.

Sternförmigkeit, Konvexität.

1. Es sei

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit reellen[11]) Koeffizienten, deren Konvergenzradius größer als 1 ist.[12]) Es bezeichne weiter $u(\theta)$ und $v(\theta)$ die reelle bzw. imaginäre Komponente von $f(e^{i\theta})$, und $u'(\theta)$, $v'(\theta)$, $u''(\theta)$, $v''(\theta)$ mögen die ersten und zweiten Derivierten von $u(\theta)$ und $v(\theta)$ nach θ bezeichnen. Dann gelten die Formeln:

$$u(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\theta, \qquad v(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\theta, \tag{2}$$

$$|f(e^{i\theta})|^2 = u^2 + v^2 = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \tag{3}$$

mit

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu c_{\nu+n}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$u'(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} n c_n \sin n\theta, \qquad v'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \cos n\theta, \tag{4}$$

$$u''(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n \cos n\theta, \quad v''(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n \sin n\theta,$$

---

[11]) Die nun folgenden Formeln sind nicht komplizierter, wenn die c_ν komplex sind.

[12]) Bei der Ableitung der folgenden Sätze für Potenzreihen $f(z)$, die für $|z| < 1$ konvergieren, ist immer $f(rz)$ diejenige Potenzreihe, deren Konver-

(5) $$2(uv'-u'v)=B_0+2\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos n\theta,$$

mit

$$B_n=\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+n)c_\nu c_{\nu+n};\quad n=0,1,2,\ldots,$$

(6) $$2(u'v''-u''v')=C_0+2\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos n\theta,$$

mit

$$C_n=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(\nu+n)(2\nu+n)c_\nu c_{\nu+n};\quad n=0,1,2,\ldots.$$

2. Es sei nun die Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ zweifach monoton. Dann ist (s. FEJÉR 2) $v(\theta)$ positiv für $0<\theta<\pi$. Es sei $\{c_n\}$ vierfach monoton. Dann zeigt die Formel $A_n=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu c_{\nu+n}$, $n=0,1,2,\ldots$, mit einem Schlage, daß auch die Koeffizientenfolge $\{A_n\}$ der Kosinusreihe (3) vierfach monoton ist. *Also ist* (nach FEJÉR 2) $|f(e^{i\theta})|^2=u^2+v^2$ *monoton abnehmend im Intervalle*[13]) $0\leqq\theta\leqq\pi$. Aus den beiden soeben erwähnten Tatsachen folgt wieder unmittelbar, daß $f(z)$ bei vierfach monotoner Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ schlicht ist für $|z|<1$.

3. Es sei nun die Folge $\{pc_p\}$, $p=1,2,3,\ldots$, zweifach monoton. Daraus folgt, daß auch die Folge $\{c_p\}$ zweifach monoton ist, also $v(\theta)>0$ für $0<\theta<\pi$. Wegen $(2\nu+n)c_\nu c_{\nu+n}=\nu c_\nu\cdot(c_{\nu+n})+$ $+c_\nu((\nu+n)c_{\nu+n})$ folgt aber aus der Formel (5) mit einem Schlage, daß die Koeffizientenfolge $\{B_n\}$ der Kosinusreihe von $2(uv'-u'v)$ zweifach monoton ist. Also ist (siehe FEJÉR 2) $uv'-u'v\geqq 0$ für jedes reelle θ. Aus beiden soeben erwähnten Tatsachen folgt leicht der Satz:

Satz IX. *Ist für die Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$ *die Folge* $\{nc_n\}$, $n=1,2,3,\ldots$, *zweifach monoton, so ist sie für* $|z|<1$ *konvergent,*

genzradius größer als 1 ist; hier bezeichnet r eine positive Größe, die kleiner als 1 ist. Entscheidend ist, daß dann $\{c_nr^n\}$ k-fach monoton ist, wenn $\{c_n\}$ selbst es ist.

[13]) Bei Gelegenheit der Erwähnung einer neuen Eigenschaft der *Kreisbilder* einer Potenzreihe $c_0+c_1z+\ldots$, deren Koeffizienten mehrfach monoton sind, bemerke ich, daß auch die *Radienbilder* (d. h. die Bilder der Radien des Einheitskreises $|z|<1$) solcher Potenzreihen bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. Hier spielen statt u, v, u', v', u'', v'' die Größen $u, v, \dot u, \dot v, \ddot u, \ddot v$ eine Rolle. Der Punkt bezeichnet eine Ableitung nach r.

schlicht und, i. B. auf den Nullpunkt der Funktionsebene, sternförmig.

Aus (6) folgt ähnlich:

Satz X. *Ist für die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *die Folge* $\{n^2 c_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *zweifach monoton, so ist sie für* $|z| < 1$ *schlicht und entwirft vom Kreise* $|z| < 1$ *ein konvexes Bild auf die Funktionsebene.*

§. 4.

Die Restenfolge.

1. Es sei

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit reellen Koefizienten, deren Konvergenzradius größer als 1 ist.

$$R_n(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots = z^n \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu+n} z^\nu \tag{2}$$

bezeichne ihre n-te Restreihe. Für $f(z)$ gilt:

$$|f(e^{i\theta})|^2 = A_0 + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \cos \mu\theta, \tag{3}$$

mit

$$A_\mu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda c_{\lambda+\mu}; \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Indem wir die Formel (3) auf die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu+n} z^\nu$ anwenden, erhalten wir für $|R_n(e^{i\theta})|^2$ die Kosinusreihe

$$|R_n(e^{i\theta})|^2 = A_0^{(n)} + 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(n)} \cos \mu\theta, \tag{4}$$

mit

$$A_\mu^{(n)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+n} c_{\lambda+n+\mu}; \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

aus welcher

$$\begin{aligned} \Delta |R_n(e^{i\theta})|^2 &= |R_n(e^{i\theta})|^2 - |R_{n+1}(e^{i\theta})|^2 = \\ &= A_0^{(n)} - A_0^{(n+1)} + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (A_\mu^{(n)} - A_\mu^{(n+1)}) \cos \mu\theta \end{aligned} \tag{6}$$

folgt. Da aber, nach (5),

$$(7)\quad A_\mu^{(n)} - A_\mu^{(n+1)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+n} c_{\lambda+n+\mu} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+n+1} c_{\lambda+n+\mu+1} = c_n c_{n+\mu},$$

so haben wir also aus der wichtigen Formel (3) in ungezwungener Weise die Entwickelung

$$(8)\quad \Delta |R_n(e^{i\theta})|^2 = c_n^2 + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} c_n c_{n+\mu} \cos \mu\theta$$

erhalten, aus welcher (wie in FEJÉR—SZEGŐ **5** gezeigt ist) der folgende Satz leicht bewiesen werden kann:

Satz XI. *Ist in der Potenzreihe* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *die Koeffizientenfolge* $\{c_n\}$ $(k+1)$*-fach monoton, so ist sie für* $|z| < 1$ *konvergent; bezeichnen* $s_n(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *die gewöhnlichen Partialsummen der Potenzreihe, so ist die Folge*

$$(9)\quad |f(z)|^2,\ |f(z) - s_0(z)|^2,\ |f(z) - s_1(z)|^2, \ldots, |f(z) - s_n(z)|^2, \ldots$$

für den ganzen Einheitskreis[14]) $|z| \leqq 1$ *(mit eventueller Ausnahme der Stelle* $z = 1$) k*-fach*[15]) *monoton.*

2. Betrachten wir speziell die Stelle $z = -1$. Wenn wir noch $\lim_{n=\infty} c_n = 0$ voraussetzen, so konvergiert die Reihe

$$(10)\quad c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \ldots$$

und wir entnehmen aus dem allgemeinen Satz XI, daß die Folge der Reste der Reihe (10), auf das Quadrat erhoben, eine k-fach monotone Folge bildet, wenn die Folge $\{c_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $(k+1)$-fach monoton ist. Dieses Resultat rührt von den Herrn JACOBSTHAL **(6)** und KNOPP **(8)** her; sie zeigen für diesen speziellen Fall sogar noch mehr; z. B. daß schon die absoluten Beträge der Reste selbst eine k-fach monotone Folge bilden, wenn $\{c_n\}$ $(k+1)$-fach monoton ist.

Der Satz XI ist also in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung des auf den Punkt $z = -1$ bezüglichen Jacobsthal—Knoppschen Satzes auf den vollen Einheitskreis.

---

[14]) Ist $z = e^{i\theta}$ eine Stelle des Einheitskreises, so verstehen wir unter $f(z) = f(e^{i\theta})$ den Limes $\lim_{r=1-0} f(re^{i\theta})$. Dieser existiert (mit eventueller Ausnahme der Stelle $z = 1$) für jede Stelle des Einheitskreises, wenn $\{c_n\}$ einfach monoton ist.

[15]) Für $k = 1$ (d. h. $k + 1 = 2$) geht dieser Satz in den in der Einleitung zitierten Satz von SZEGŐ über.

3. Es sei hier eine verwandte Frage berührt: Wie verhält sich der Rest $c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots$ zum ersten „vernachläßigten" Gliede $c_n z^n$? Ich möchte hier nur den Fall der totalmonotonen Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ behandeln. Da aus dem Hausdorffschen Satze

$$(11) \qquad c_n z^n = \int_0^1 t^n z^n \, d\varphi(t),$$

$$(12) \qquad R_n(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu z^\nu = \int_0^1 \frac{t^n z^n}{1 - tz} \, d\varphi(t)$$

folgt, so ist

$$(13) \qquad \frac{R_n(z)}{c_n z^n} = \frac{\int_0^1 \frac{t^n}{1-tz} \, d\varphi(t)}{\int_0^1 t^n \, d\varphi(t)},$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots; \; |z| < 1, \; z \neq 0.$$

Es bewege sich nun z in der *linken Hälfte* des Einheitskreises $|z| < 1$, d. h. es sei $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 3\frac{\pi}{2}$. Hier ist $|1 - tz| \geq 1$, da $0 \leq t \leq 1$. Also ist ebenda, nach (13),

$$(14) \qquad \frac{|R_n(z)|}{|c_n z^n|} \leq \frac{\int_0^1 t^n \, d\varphi(t)}{\int_0^1 t^n \, d\varphi(t)} = 1.$$

Wir haben also den folgenden Satz erhalten:

Satz XII. *Ist in der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ die Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ totalmonoton, so ist in der „linken Hälfte" des Einheitskreises $\left(d. h. für\; z = re^{i\theta},\; 0 \leq r < 1,\; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 3\frac{\pi}{2}\right)$*

$$|c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots| \leq |c_n z^n|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

§. 5.

Über die zur Potenzreihe gehörigen Legendrepolynome.

1. Ist

$$(1) \qquad f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots$$

eine beliebige Potenzreihe mit reellen Koeffizienten, so führt die formale Cauchysche Multiplikation zu

$$|f(re^{i\theta})|^2 = f(re^{i\theta})\,f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n e^{ni\theta} \,.\, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n e^{-ni\theta} = \tag{2}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\,.\,r^n,$$

wo also

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu e^{\nu i\theta} \,.\, \alpha_{n-\nu} e^{-(n-\nu)i\theta} =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \alpha_{n-\nu} e^{(2\nu-n)i\theta} = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \alpha_{n-\nu} \cos(n-2\nu)\theta = \tag{3}$$
$$= 2\alpha_0\alpha_n \cos n\theta + 2\alpha_1\alpha_{n-1}\cos(n-2)\theta + 2\alpha_2\alpha_{n-2}\cos(n-4)\theta + \ldots.$$

Die durch die Formel

$$P_n(\cos\theta) = 2\alpha_0\alpha_n \cos n\theta + \tag{4}$$
$$+ 2\alpha_1\alpha_{n-1}\cos(n-2)\theta + 2\alpha_2\alpha_{n-2}\cos(n-4)\theta + \ldots$$

definierte unendliche Folge von Kosinuspolynomen[16]) *nenne ich die zur Zahlenfolge*

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots$$

gehörige Folge von Legendrepolynomen. Ich muß hinzufügen, daß in der Definitionsformel (4) *das letzte Glied* $2\alpha_m\alpha_{m+1}\cos\theta$ *ist, wenn* $n = 2m+1$, *und* α_m^2, *wenn* $n = 2m$ *ist.*

Hat die Potenzreihe (1) einen von Null verschiedenen Konvergenzradius R, so ist natürlich auch die Potenzreihe der nichtnegativen Veränderlichen r

$$|f(re^{i\theta})|^2 = P_0(\cos\theta) + P_1(\cos\theta)\,r + \ldots + P_n(\cos\theta)\,r^n + \ldots \tag{5}$$

für $0 \leqq r < R$ konvergent und stellt tatsächlich $|f(re^{i\theta})|^2$ dar[17]).

---

[16]) Sind die α_n komplex, so sind die durch (2) definierten $P_n(\cos\theta)$ „gemischte" trigonometrische Polynome.

[17]) Ich stelle hier nebeneinander die *zwei* Entwicklungen von $|f(re^{i\theta})|^2$ für eine Potenzreihe

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

die ich in dieser Arbeit benützt habe.

1. Entwicklung von $|f(re^{i\theta})|^2$ in eine *Kosinusreihe* nach dem Polarwinkel θ:

$$|f(re^{i\theta})|^2 = A_0(r) + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n(r)\cos n\theta$$

mit

$$A_n(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu c_{\nu+n}\, r^{2\nu+n};\quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

(Fortsetzung der Fussnote auf S. 112)

Ich habe die Polynome $P_n(\cos\theta)$ verallgemeinerte Legendresche Polynome, oder kurz Legendresche Polynome genannt, weil, wenn $f(z) = (1-z)^{-\frac{1}{2}}$ ist, $P_n(\cos\theta)$ tatsächlich mit dem gewöhnlichen Legendreschen Polynom identisch ist. Ist $f(z)=(1-z)^{-\varrho}$, (ϱ beliebige reelle Zahl) so sind die $P_n^{(\varrho)}(\cos\theta)$ die s. g. *ultrasphärischen* Polynome (mit dem Parameter ϱ).

Da die Summe der Potenzreihe in r

$$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)\,.\,r+\ldots+P_n(\cos\theta)\,.\,r^n+\ldots$$

gleich $|f(re^{i\theta})|^2$ ist, so ist also ihre Summe immer nichtnegativ. Ich habe nun neuerdings bewiesen (FEJÉR 3), daß, wenn die Folge $\{\alpha_n\}$ *totalmonoton* ist, die „Koeffizientenreihe"

$$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)+\ldots+P_n(\cos\theta)+\ldots$$

durchwegs nichtnegative Partialsummen *erster* Ordnung (also auch durchwegs nichtnegative arithmetische Mittel erster Ordnung) hat, für jeden reellen Wert von θ. Hier soll bewiesen werden, daß dieser Satz schon bei der *Monotonieordnung* $k=2$ *gültig ist.* Ich werde also beweisen den

Satz XIII. *Bezeichnet* $P_0(\cos\theta), P_1(\cos\theta), \ldots, P_n(\cos\theta), \ldots$ *die Folge der Legendreschen Polynome, die zur Zahlenfolge* α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *gehört, so sind die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Partialsummen der Reihe*

$$P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)+\ldots+P_n(\cos\theta)+\ldots \tag{6}$$

durchwegs nichtnegativ für jeden reellen Wert von θ, *vorausgesetzt, daß die Folge* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *eine zweifach monotone Folge ist, d. h. daß sie nichtnegativ, monoton fallend, und von unten konvex ist*[18]).

---

2. Entwicklung von $|f(re^{i\theta})|^2$ in eine *Potenzreihe* nach den Potenzen des Radiusvectors r:

$$|f(re^{i\theta})|^2=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\,r^n.$$

Hier sind $P_0(\cos\theta), P_1(\cos\theta), \ldots, P_n(\cos\theta), \ldots$ die zur Folge $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ gehörigen Legendrepolynome.

[18]) Daraus folgt, daß die Funktion $\dfrac{|f(re^{i\theta})|^2}{(1-r)^2}$ mit allen ihren Derivierten nach r nichtnegativ ist für $0 \leqq r < 1$, falls die Koeffizientenfolge der Potenzreihe $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ zweifach monoton ist.

2. Beweis: Wir schreiben, zum leichteren Verständnis, zunächst die ersten Legendreschen Polynome ausführlich an, u. zw. jede nach fallenden Vielfachen von θ geordnet, d. h. so, wie sie sich aus der Formel (4) ergeben:

$$
\begin{aligned}
&P_0(\cos\theta)=\alpha_0^2\\
&P_1(\cos\theta)=2\alpha_0\alpha_1\cos\theta\\
(7)\qquad &P_2(\cos\theta)=2\alpha_0\alpha_2\cos 2\theta+\alpha_1^2\\
&P_3(\cos\theta)=2\alpha_0\alpha_3\cos 3\theta+2\alpha_1\alpha_2\cos\theta\\
&P_4(\cos\theta)=2\alpha_0\alpha_4\cos 4\theta+2\alpha_1\alpha_3\cos 2\theta+\alpha_2^2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Indem wir nun hier die erste Zeile mit $(n+1)$, die zweite mit n u. s. w., die $(n+1)$-te Zeile mit 1 multiplizieren und *kolonnenweise* addieren, so erhalten wir für die Partialsumme erster Ordnung und vom Index n der Reihe (6) die folgende Formel:

$$
(8)\qquad \sum_{\lambda=0}^{n}(n+1-\lambda)\,P_\lambda(\cos\theta)=
$$

$$
=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\alpha_\nu \sideset{}{'}\sum_{\mu=0}^{n-2\nu}((n-2\nu)+1-\mu)\,\alpha_{\nu+\mu}\cos\mu\theta.
$$

Hier habe ich zunächst zu erklären, was ich unter einer gestrichenen Summe $\sum'$ verstehe. $\sideset{}{'}\sum_{q=0}^{s} u_q$ bezeichne einfach:

$$
\sideset{}{'}\sum_{q=0}^{s} u_q=u_0+2u_1+2u_2+\ldots+2u_s.
$$

Betrachten wir nun die gestrichene Summe auf der rechten Seite der Relation (8). Da in dieser n und ν fest sind, so werde ich kurz $n-2\nu=m$, $\alpha_{\nu+\mu}=\beta_\mu$ setzen. Dann erhält Σ' die Form:

$$
(9)\qquad \sideset{}{'}\sum_{\mu=0}^{m}(m+1-\mu)\,\beta_\mu\cos\mu\theta=(m+1)\,\beta_0+m\beta_1\,.\,2\cos\theta+\ldots+
$$
$$
+1\,.\,\beta_m\,.\,2\cos m\theta.
$$

Da die Folge $\{\alpha_\mu\}$, $\mu=0, 1, \ldots,$ zweifach monoton ist, so ist auch die Folge $\{\alpha_{\nu+\mu}\}$, $\mu=0, 1, \ldots,$ d. h. die Folge $\{\beta_\mu\}$, $\mu=0, 1, \ldots,$ zweifach monoton. Die endliche Zahlenfolge β_0, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ ist also nichtnegativ, fallend und von unten konvex. Daraus folgt aber *nicht*, daß das Kosinuspolynom m-ter Ordnung

$$
(10)\qquad \sideset{}{'}\sum_{\mu=0}^{m}\beta_\mu\cos\mu\theta
$$

nichtnegativ ist für jedes reelle θ. $\Bigl($Z. B.: ist $\beta_0=\beta_1=\ldots=\beta_m=1$, so ist $\sum\limits_{\mu=0}^{m}{}' \cos\mu\theta=\dfrac{\sin(2m+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\Bigr)$. Wohl aber ist das Polynom (9) nichtnegativ für jedes reelle θ. Da nämlich auch die endliche Folge $\{m+1-\mu\}$, $\mu=0,1,2,\ldots,m$, nichtnegativ, fallend und von unten konvex (nichtkonkav) ist, so ist auch die Produktfolge $(m+1-\mu)\beta_\mu=\gamma_\mu$, $\mu=0,1,2,\ldots,m$, nichtnegativ, fallend und konvex von unten. Wir merken uns noch, daß, wegen $\gamma_{m-1}=2\beta_{m-1}$ und $\gamma_m=\beta_m$, und mit Rücksicht auf $\beta_{m-1}\geqq\beta_m$, die Ungleichung

$$\gamma_{m-1}\geqq 2\gamma_m \tag{11}$$

stattfindet.

Da nun die Partialsumme erster Ordnung $s_n^{(1)}(\theta)$ der Reihe $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty}{}' \cos\mu\theta$ den Wert $\left(\dfrac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$ hat, also nichtnegativ ist für $n=0,1,2,\ldots$ und für jedes reelle θ, und da weiter die zweifache Abelsche Umformung

$$\sum_{\mu=0}^{m}{}'(m+1-\mu)\beta_\mu\cos\mu\theta=\sum_{\mu=0}^{m}{}'\gamma_\mu\cos\mu\theta= \tag{12}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-2}(\Delta^2\gamma_k)\cdot s_k^{(1)}(\theta)+(\gamma_{m-1}-2\gamma_m)\,s_{m-1}^{(1)}(\theta)+\gamma_m s_m^{(1)}(\theta)$$

liefert, so ist, mit besonderer Rücksicht auf die Ungleichung (11), $\sum\limits_{\mu=0}^{m}{}'(m+1-\mu)\beta_\mu\cos\mu\theta$, und somit auch $\sum\limits_{\lambda=0}^{n}(n+1-\lambda)P_\lambda(\cos\theta)$, für jedes θ, und für jedes $n=0,1,2,\ldots$ nichtnegativ, w. z. b. w.

Literaturverzeichnis.

1. J. W. Alexander, Functions Which Map the Interior of the Unit Circle upon Simple Regions, *Annals of Mathematics*, Second Series, **17** (1915–16), pp. 12–22.
2. L. Fejér, Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *Transactions of the American Mathematical Society*, **39** (1936), pp. 18–59.

3. L. Fejér, Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendrepolynome, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **31** (1935), pp. 307—316.
4. L. Fejér, A hatványsorról és a vele kapcsolatos Legendre-féle többtaguakról, *Matematikai és Természettudományi Értesítő* (Budapest), **54** (1935), pp. 160—176.
5. L. Fejér und G. Szegő, Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *Prace Matematyczno-Fizyczne*, **44** (1935).
6. E. Jacobsthal, Mittelwertbildung und Reihentransformation, *Mathematische Zeitschrift*, **6** (1920), pp. 100—117.
7. K. Knopp, Mehrfach monotone Zahlenfolgen, *Mathematische Zeitschrift*, **22** (1925), pp. 75—85.
8. K. Knopp, Mittelwertbildung und Reihentransformation, *Mathematische Zeitschrift*, **6** (1920), pp. 118—123.
9. G. Pólya, Application of a Theorem Connectod with the Problem of Moments, *Messenger of Mathematics*, **55** (1926), pp. 189—192.

(Eingegangen am 20. Mai 1936.)

Sur les ensembles compacts de fonctions de carrés sommables.

Par MAURICE FRÉCHET à Paris.

Ensembles compacts. Dès qu'on a à étudier, non pas une fonction, ni les propriétés communes à une classe de fonctions mais les relations mutuelles d'un ensemble de fonctions, un des premiers problèmes qui se posent est de déterminer à quelle condition un tel ensemble est compact. (On peut dire ici qu'un ensemble E est compact si tout sous-ensemble infini d'éléments de E contient une suite convergente.)

Divers modes de convergence. Il est bien clair que la réponse au problème posé dépendra de la définition donnée du mot convergence. Nous allons nous occuper ici de la *convergence en mesure* et de la *convergence en moyenne quadratique* ou plus généralement de la *convergence en moyenne d'ordre r.*

Les conditions de compacité correspondantes ont été obtenues par différents auteurs. Les démonstrations données d'une part par M. MARCEL RIESZ[1]) pour les conditions qu'il établit pour la convergence en moyenne d'ordre $r \geqq 1$ et d'autre part par M. HANSON[2]) pour le cas de la convergence en mesure se basent essentiellement sur une condition générale de compacité d'un ensemble abstrait. Les deux auteurs se réfèrent pour l'énoncé et la démonstration de cette condition à l'excellent livre de M. HAUSDORFF[3]) dont la première édition date de 1914. On nous permettra de signaler que cette même

---

1) M. RIESZ, Sur les ensembles compacts de fonctions sommables, *ces Acta,* **6** (1933), p. 136—142.

2) E. H. HANSON, A Note on Compactness, *Bulletin American Math. Society,* **39** (1933), p. 397—400.

3) F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre,* seconde édition (Berlin et Leipzig, 1927).

condition a été énoncée et démontrée par nous en 1910[4]) et que nous avons nous-même utilisé[5]) cette condition générale pour établir des conditions particulières de compacité relatives à des ensembles non abstraits.

Recherche d'un nouveau critère. Nous allons revenir aux conditions de compacité relatives aux deux modes de convergence mentionnés ci-dessus. Au lieu, en effet, de traiter séparément ces deux problèmes, on peut déduire l'une des conditions de l'autre. C'est ce que nous allons faire. Il n'en résulte pas seulement un autre mode de démonstration de la condition relative à la moyenne d'ordre r, il en résultera aussi une forme de critère, distincte de celles qui ont été proposées et qui peut avoir ses avantages, dans certains cas, sans prétendre à être toujours plus commode.

Soit J le domaine, *borné ou non,* sur lequel les fonctions $f(x)$ envisagées sont supposées définies. Il n'y aura aucune complication à supposer que J est un domaine à un nombre fini ν de dimensions. Nous dirons que $f(x)$, supposée mesurable, appartient à l'espace L_r si l'intégrale

$$\int_J |f(x)|^r dx$$

(qui est, en réalité, une intégrale ν-uple, x étant mis pour $(x_1, \ldots, x_\nu)$, dx pour $dx_1 \ldots dx_\nu$) est déterminée et finie, c'est-à-dire si $|f(x)|^r$ est sommable sur J. Si f et f_n appartiennent à L_r, il en est de même de $f-f_n$. Nous dirons que f_n *converge vers* f *en moyenne d'ordre* r *sur* J *si* $\int_J |f(x)-f_n(x)|^r dx$ *tend vers zéro.*

Premier critère. Nous avons autrefois[6]) établi la condition de compacité d'un ensemble de l'espace H à une infinité de coordonnées de Hilbert. Cet espace étant isométrique de l'espace L_2, il en résultait une condition de compacité dans L_2. En considérant un système complet orthonormé choisi arbitrairement de fonctions de L_2, soit $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \ldots$, notre condition relative à H se traduit immédiatement dans L_2 de la façon suivante:

---

[4]) M. Fréchet, Les ensembles abstraits et le Calcul Fonctionnel, *Rendiconti Circolo Mat. Palermo,* 30 (1910), p. 1—26.

[5]) M. Fréchet, Les espaces topologiquement affines, *Acta Mathematica,* 47 (1926), p. 25—52.

[6]) M. Fréchet, Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées, *Nouvelles Annales de Math.,* 8 (1908), p. 97—116 et 289—317, spec. p. 308; voir aussi, M. Fréchet, loc. cit. [4]), p. 18.

Appelons approximation d'une fonction $f(x)$ de L_2 au moyen de n fonctions $\varphi_i(x)$, la plus petite valeur de

$$\sqrt{\int_J \{f(x) - [a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)]\}^2 dx}$$

quand les a varient. Ceci étant, *pour qu'un ensemble E de fonctions de carrés sommables soit compact, il faut et il suffit que l'approximation de $f(x)$ par les n premières fonctions $\varphi_i(x)$ converge, quand n croît indéfiniment, vers zéro „également" quand $f(x)$ parcourt E.*

Mais un tel critère — qui peut être commode — a l'inconvénient de faire intervenir des fonctions φ_i auxiliaires. Il était donc naturel de chercher un critère ne faisant intervenir que les fonctions f de E. C'est M. Kolmogoroff qui a eu le mérite de donner le premier un tel critère dans le cas où J est borné. M. Tamarkin l'a étendu au cas où J peut être illimité. Et M. M. Riesz a obtenu pour la même condition un critère d'une autre forme[7]) au moyen d'une démonstration différente.

Convergence en mesure. Nous allons résoudre le même problème et arriver à une quatrième forme du critère cherché en utilisant le critère de compacité relatif à la convergence en mesure que nous avions établi en 1927[8]).

On dit que $f_n(x)$ *converge en mesure* vers $f(x)$ sur un domaine J, si, quel que soit $\varepsilon > 0$, la mesure, m_n, de l'ensemble des points de J où $|f_n(x) - f(x)| \geqq \varepsilon$ tend vers zéro avec $1/n$. (Cette définition conserve un sens pour des fonctions non mesurables en remplaçant la mesure par la mesure extérieure.)

Il est clair que la convergence en moyenne d'ordre r entraîne la convergence en mesure, car on a

$$\int_J |f - f_n|^r dx \geqq \varepsilon^r m_n \geqq 0$$

pour ε arbitraire fixe; lorsque le premier membre tend vers zéro, m_n tend aussi vers zéro avec $1/n$. La réciproque, au contraire, n'a lieu que si l'on impose aux f_n une condition supplémentaire que nous allons formuler.

---

7) Une propriété classique due à M. Lebesgue et concernant les intégrales de fonctions sommables, doit avoir lieu „également".

8) M. Fréchet, Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables, *Fundamenta Math.*, 9 (1927), p. 25—32.

Condition d'égale sommabilité. Nous utiliserons à cet effet une condition „d'égale sommabilité" qui se présente sous une double forme. La première forme a été introduite par M. TAMARKIN dans le problème actuel pour considérer le cas des domaines non bornés. La seconde permettra de considérer dans le même problème les fonctions non bornées. Elle a été introduite par M. FLAMANT, — qui avait bien voulu nous en informer, — pour formuler une condition d'équivalence de la convergence en mesure et de la convergence en moyenne quadratique. C'est, du reste, cette information qui nous a fait penser à déduire le critère de compacité dans L_2, et même dans L_r, du critère de compacité dans l'espace M des fonctions mesurables.

Nous déterminerons d'abord une inégalité utile — l'inégalité (2) — qui précise une conséquence de cette affirmation vague que: si les ensembles, sur J, où deux fonctions sont grandes, ne sont pas trop étendus, il en est de même pour leur somme et pour leur différence.

A cet effet, observons qu'il existe un nombre k dépendant uniquement de r tel que, quels que soient a et b, on ait

$$|a+b|^r \leqq k(|a|^r+|b|^r).$$

(On peut prendre, par exemple, $k=2^r$). Appelons en général x_A un nombre égal à zéro si $|x|<A$, et à x si $|x|\geqq A$. Alors, on peut déduire de l'inégalité ci-dessus qu'il existe un nombre K tel que

$$(1) \qquad \{|a+b|^r\}_{KA} \leqq K\{|a|_A^r+|b|_A^r\}$$

pour tout $A\geqq 0$, K ne dépendant que de r. (On peut prendre par exemple $K=2k$).[9]

Il en résulte que pour tout sous-ensemble j de J et pour tout nombre $A>0$, on aura:

$$(2) \qquad \int_j \{|f(x)+g(x)|^r\}_{KA}\,dx \leqq K\int_j \{|f(x)|^r\}_A\,dx + K\int_j \{|g(x)|^r\}_A\,dx$$

pour tout couple de fonctions $f(x)$, $g(x)$ de L_r.

Ceci étant, même si J n'est pas borné, on peut toujours former une suite de sous-ensembles de J, soient $J_1, J_2, \ldots$, chacun

---

[9]) Voir pour plus de détails sur ces inégalités, les pages 188—189 de l'ouvrage cité à la fin du présent mémoire.

compris dans le suivant et de mesure finie, telle que tout point de J appartienne à l'un au moins des J_s. On sait que si f_n appartient à L_r, on aura:

$$\int_J |f_n|^r dx = \lim_{s\to\infty} \int_{J_s} |f_n|^r dx, \tag{3}$$

et

$$\lim_{s\to\infty} \int_J \{|f_n|^r\}_s dx = 0. \tag{4}$$

Nous allons montrer que si f_n converge en moyenne d'ordre r sur J vers f de L_r, la convergence est uniforme, quand n varie, dans ces deux égalités.

En effet, on a d'après (2), écrit pour $A=0$:

$$\int_{J-J_s} |f_n|^r dx \leqq K \int_{J-J_s} |f|^r dx + K \int_J |f-f_n|^r dx.$$

Prenons N de sorte que le dernier terme soit $< \varepsilon/2$ pour $n > N$, et σ_0 de sorte que l'avant-dernier terme soit $< \varepsilon/2$ pour $s > \sigma_0$. Alors le premier terme sera $< \varepsilon$ pour $n > N$ et $s > \sigma_0$. Mais le premier terme est $< \varepsilon$ pour $s > \sigma_n$. En appelant σ le plus grand des $N+1$ nombres $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$, on voit qu'on aura

$$\int_{J-J_s} |f_n|^r dx < \varepsilon \tag{5}$$

quel que soit n (dont σ est indépendant): la convergence de (3) est uniforme. D'autre part, on a aussi d'après (2)

$$\int_J \{|f_n|^r\}_D dx \leqq K \int_J \{|f(x)|^r\}_{\frac{D}{K}} dx + K \int_J |f-f_n|^r dx.$$

En prenant D assez grand, $D \geqq A_0$, l'avant-dernier terme est $< \varepsilon/2$. Donc pour $n > N$ et $D \geqq A_0$, le premier sera $< \varepsilon$. Or ce premier est $< \varepsilon$ pour $D \geqq A_n$. En prenant pour A le plus grand des nombres $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_N$, on voit qu'on aura

$$\int_J \{|f_n|^r\}_A dx < \varepsilon \tag{6}$$

quel que soit n (dont A est indépendant). La convergence de (4) est uniforme.

La première condition est celle de M. Tamarkin, la seconde celle de M. Flamant. Nous emploierons pour l'ensemble des deux conditions la dénomination d'égale sommabilité des $|f_n|^r$ sur J

introduite par M. FLAMANT[10]) pour désigner la seconde condition.

Nous dirons donc que les fonctions $\varphi(x)$ d'un ensemble G de fonctions sommables sur J sont *également sommables* sur J, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux nombres σ et A tels que

$$\int_{J-J_\sigma} |\varphi|\, dx < \varepsilon, \int_J |\varphi|_A\, dx < \varepsilon,$$

A et σ restant fixes quand φ parcourt G.

On peut d'ailleurs englober les deux conditions en une seule. En effet on aura alors, *a fortiori*,

$$\int_J |\varphi|\, dx - \int_{J_\sigma} [|\varphi| - |\varphi|_A]\, dx \leqq \int_{J-J_\sigma} |\varphi|\, dx + \int_J |\varphi|_A\, dx < 2\varepsilon.$$

On peut représenter en général $|z| - |z|_A$ par $|z|^A$: ce sera une quantité égale à $|z|$ pour $|z| < A$ et à zéro pour $|z| \geqq A$. On aura donc

$$\int_J |\varphi|\, dx - \int_{J_\sigma} |\varphi|^A\, dx < 2\varepsilon.$$

Réciproquement, si pour tout ω, on peut choisir t et B tels que

$$\int_J |\varphi|\, dx - \int_{J_s} |\varphi|^D\, dx < \omega \tag{7}$$

pour $s \geqq t$, $D \geqq B$, comme on a

$$\lim_{s\to\infty} \int_{J_s} |\varphi|^D\, dx = \int_J |\varphi|^D\, dx$$

$$\lim_{D\to\infty} \int_{J_s} |\varphi|^D\, dx = \int_{J_s} |\varphi|\, dx,$$

on déduira de (7):

$$\int_J |\varphi|\, dx - \int_J |\varphi|^D\, dx \leqq \omega, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_J |\varphi|_D\, dx \leqq \omega,$$

$$\int_J |\varphi|\, dx - \int_{J_s} |\varphi|\, dx \leqq \omega, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_{J-J_s} |\varphi|\, dx \leqq \omega.$$

En résumé, nous dirons que les fonctions $\varphi(x)$ d'un ensemble G de fonctions sommables sur J sont *également somma-*

---

[10]) Sur deux fonctions attachées à une fonction sommable et leur application à la limite des intégrales de Lebesgue, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, **201** (1935), p. 930—932.

bles sur J, si à tout $\varepsilon > 0$, correspondent A et σ tels que

$$\int_J |\varphi|\, dx - \int_{J_\sigma} |\varphi|^A\, dx < \varepsilon,$$

quelle que soit φ de G.

C'est dire que la convergence de $\int_{J_\sigma} |\varphi|^A dx$ vers $\int_J |\varphi|\, dx$ quand A et σ tendent simultanément et indépendamment vers l'infini, est „égale" quand φ parcourt G.

Nous venons de montrer que si $f_n(x)$ de L_r converge en moyenne d'ordre r sur J vers $f(x)$ de L_r, les fonctions $|f_n|^r$ sont également sommables sur J. Bien entendu, la réciproque n'est pas vraie. Cependant il nous sera utile de noter que si f et f_n sont des fonctions de L_r et si les $|f_n|^r$ sont également sommables sur J, il en sera de même des $|f-f_n|^r$. Car on a, en vertu de (2),

$$\int_j \{|f-f_n|^r\}_D\, dx \leqq K \int_j \{|f|^r\}_{\frac{D}{K}}\, dx + K \int_j \{|f_n|^r\}_{\frac{D}{K}}\, dx.$$

En prenant $j = J$ et D assez grand, on rendra les deux termes du second membre $< \varepsilon/2$ quel que soit n, d'où

$$\int_J \{|f-f_n|^r\}_D\, dx < \varepsilon.$$

En prenant $D = 0$, $j = J - J_s$ et s assez grand, on verra de même que, quel que soit n,

$$\int_{J-J_s} |f-f_n|^r dx < \varepsilon.$$

Une condition suffisante pour l'égale sommabilité. Il est bien évident que si des fonctions f sont également bornées sur un domaine borné fixe J, les $|f|^r$ sont également sommables sur J, pour toute valeur fixe positive de r. On peut donner une condition suffisante plus large:

Si un ensemble G de fonctions $f(x)$ définies sur un domaine J borné est tel que les intégrales $\int_J |f(x)|^t dx$ soient inférieures à un même nombre Q_t, les $|f|^r$ sont également sommables sur J pour toute valeur fixe de r inférieure à t.

En effet, on a:

$$\int_J \{|f|^r\}_A\, dx \leqq \frac{1}{A^{t-r}} \int_J \{|f|^t\}_A\, dx \leqq \frac{Q_t}{A^{t-r}};$$

par suite, la convergence vers zéro du premier membre quand A croît est „égale“ quand f parcourt G.

Cette propriété ne s'étend pas au cas d'un domaine quelconque comme on le voit, par exemple, en prenant pour J la demi-droite $x \geqq 1$, en prenant $r=1$, $t=2$ et en prenant pour les f les fonctions $\frac{1}{x^\alpha}$, α restant tel sur G que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Supposons maintenant que, f_n et f appartenant à L_r, f_n converge vers f en mesure sur J et voyons dans quel cas en résultera la convergence en moyenne d'ordre r.

Un cas simple où les deux convergences ne peuvent être que simultanées est le cas où J est borné et où f et les f_n sont bornés dans leur ensemble par un même nombre A.

En effet, soit m_n la mesure du sous-ensemble E de J sur lequel $|f-f_n| > \omega$. On a

$$\int_J |f-f_n|^r dx = \int_E + \int_{J-E} \leqq (2A)^r m_n + \omega^r . \operatorname{mes} J.$$

En prenant ω assez petit, puis n assez grand ($n > N$), on rendra le dernier membre inférieur à un nombre ε donné pour $n > N$.

Ceci étant, passons au cas général où l'on ne suppose, ni J fini, ni f, ni les f_n bornés. Pour que f_n converge en moyenne vers f sur J, il est nécessaire d'après ce qui précède que les f_n soient également sommables sur J. Quand f_n converge en mesure vers f sur J, cette condition nécessaire devient suffisante.

Pour le montrer, observons que, d'après ce qui précède, les fonctions $\varphi_n = |f-f_n|^r$ sont des fonctions également sommables sur J. D'autre part, il est clair que φ_n converge en mesure vers zéro sur J quand f_n converge en mesure vers f. Dès lors tout revient à prouver que si des fonctions $\varphi_n \geqq 0$ convergeant en mesure vers zéro sur J sont également sommables sur J, l'intégrale $\int_J \varphi_n dx$ tend vers zéro.

Or, d'après l'hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux nombres σ, A, indépendant de n, tels que

$$\int_J \varphi_n dx - \int_{J_\sigma} (\varphi_n)^A dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A et σ étant ainsi fixés, les fonctions $(\varphi_n)^A$ sont des fonctions également bornées qui convergent en mesure comme les φ_n vers zéro sur J.

Dès lors, leur intégrale sur un domaine borné J_σ converge vers zéro et N existe tel que

$$\int_{J_\sigma} (\varphi_n)^A dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour } n > N.$$

D'où

$$0 \leqq \int_J \varphi_n dx < \varepsilon \qquad \text{pour } n > N.$$

Ainsi, nous avons démontré ce théorème établi par M. FLAMANT dans le cas où $r=2$ et où J est fini: *la condition nécessaire et suffisante à vérifier par une suite de fonctions f_n de L_r pour que sa convergence en mesure vers une fonction f de L_r soit équivalente à sa convergence en moyenne d'ordre r vers f est que les $|f_n|^r$ soient également sommables sur J.*

Condition de compacité dans L_r. Ceci étant, nous pouvons maintenant établir très brièvement la condition de compacité dans L_r.

Tout d'abord, il est clair que si un ensemble E de fonctions f de L_r est compact sur J, les fonctions $\varphi = |f|^r$ sont également sommables sur J. Car, dans le cas contraire, il existerait un nombre $\varepsilon > 0$, tel que quels que soient σ et A, l'inégalité

$$\int_J \varphi\, dx - \int_{J_\sigma} (\varphi)^A dx < \varepsilon$$

n'ait pas lieu pour toutes les fonctions φ admissibles. En particulier, en prenant $\sigma = p$ et $A = p$, il existerait une fonction f_p de E telle qu'en posant $\varphi_p = |f_p|^r$, on ait:

$$\int_J \varphi_p\, dx - \int_{J_p} (\varphi_p)^p dx \geqq \varepsilon.$$

Si E est compact dans L_r, il existerait une suite de fonctions f_{p_n} (avec $p_{n+1} > p_n$) extraite de la suite des f_p et convergeant en moyenne d'ordre r vers une fonction f de L_r. Dès lors, les $|f_{p_n}|^r$ seraient également sommables sur J; il existerait deux nombres s et D tels que

$$\int_J \varphi_{p_n} dx - \int_{J_s} (\varphi_{p_n})^D dx < \varepsilon.$$

Si maintenant, on prend n tel que $p_n > s$ et $p_n > D$, on aura:

$$\int_J \varphi_{p_n} dx < \varepsilon + \int_{J_s} (\varphi_{p_n})^D dx < \varepsilon + \int_{J_{p_n}} (\varphi_{p_n})^{p_n} dx$$

d'où la contradiction annoncée.

D'autre part, si un ensemble E est compact quand on le considère dans L_r, il l'est encore quand on le considère dans l'espace M des fonctions mesurables. Nous avons démontré (note [8])) qu'alors les fonctions de E sont presque également continues, c'est-à-dire, qu'à tout couple de nombres positifs ε, ω correspond un nombre q tel qu'on puisse décomposer J en q parties fixes $j_1, j_2, \ldots, j_q$ et assigner à chaque fonction f de E un ensemble e_f (éventuellement vide) de mesure $< \varepsilon$, de sorte que l'oscillation de f sur chaque ensemble $j_i - e_f$ soit $< \omega$.

Notre démonstration concernait le cas où J est un intervalle. Mais elle s'étend au cas d'un domain borné ou non d'un espace à ν dimensions sans autre changement que des changements de mots.

Ainsi, *pour qu'un ensemble E de fonctions f de L_r soit compact sur J, il faut:* (1°) *que les fonctions $|f|^r$ soient également sommables sur J;* (2°) *que les fonctions f soient presque également continues sur J.*

Ces conditions nécessaires sont suffisantes. En effet, en vertu de (1°), on a

$$\int_J |f|^r dx \leqq \int_{J_\sigma} \{|f|^r\}^A dx + \varepsilon \leqq A^r \operatorname{mes} J_\sigma + \varepsilon = T$$

donc $\int_J |f|^r dx$ est borné quand f parcourt E. Si donc α_f est le sous-ensemble de f où $|f| \geqq H$, on aura

$$T \geqq \int_J |f|^r dx \geqq H^r \operatorname{mes} \alpha_f,$$

d'où

$$\operatorname{mes} \alpha_f \leqq \frac{T}{H^r}.$$

Dès lors, en prenant H assez grand, on aura $\frac{T}{H^r} < \varepsilon$ et par suite mes $\alpha_f < \varepsilon$. En appelant β_f la réunion des points de e_f et β_f, on aura mes $\beta_f < 2\varepsilon$ et $|f| < H$ sur $E - \beta_f$. C'est ce qu'on peut exprimer en disant que les fonctions f sont *presque également bornées* sur J. Or nous avons démontré (note [8])) que si des fonctions mesurables sont à la fois presque également bornées sur J et presque également continues sur J, elles forment un ensemble qui, considéré comme appartenant à M, est compact.

C'est-à-dire que de tout sous-ensemble infini de fonctions de E, on peut tirer une suite S de fonctions f_n qui converge en mesure sur J. Comme les fonctions $|f_n|^r$ sont également sommables sur J, il en résultera que f_n converge en moyenne d'ordre r sur J vers une fonction de L_r.

On observera que la condition (2⁰) a, sur les critères de compacité dans L_r déjà publiés, l'avantage de mieux mettre directement en évidence le comportement des f.

Remarque. Des raisonnements analogues aux précédents peuvent être faits en Calcul des Probabilités quand on cherche les conditions de compacité d'un ensemble de variables aléatoires définies sur la même catégorie d'épreuves et qu'on s'attache, soit à la convergence „en probabilité", soit à la convergence en moyenne d'ordre r. Ces raisonnements sont exposés au Chapitre V de notre ouvrage *Recherches modernes sur la Théorie des Probabilités* qui vient de paraître comme fascicule III (Premier Livre) du „Traité des Probabilités" par E. Borel et divers auteurs (Gauthier—Villars, Paris, 1936).

(Reçu le 31 août 1936)

Quelques remarques sur l'interpolation.

Par J. MARCINKIEWICZ à Wilno.

Cette note contient quelques théorèmes de la théorie de l'interpolation. L'un d'eux, à savoir le théorème 2, est connu. Il est dû à M. FABER.[1])

1. Désignons par $\{\xi_n\}$ le système de $2n+1$ points x_i, $i=0, 1, \ldots, 2n$, $0 \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$, par $U_n(\xi_n, f, x)$ le polynome trigonométrique d'ordre n défini par les $2n+1$ égalités

$$(1.1) \qquad U_n(\xi_n, f, x_i) = f(x_i)\,; \qquad i=0, 1, 2, \ldots, 2n,$$

et par $S_n(f) = S_n(f, x)$ la somme partielle d'ordre n de la série de FOURIER de la fonction f. On a le

Théorème 1. *La fonction f étant supposée intégrable au sens de Lebesgue et de période 2π, l'expression $U_n(\xi_n, g_u, x)$ où $g_u(x) = f(x+u)$, est définie pour presque chaque u et de plus, considérée comme fonction de u, elle est sommable et vérifie la relation*

$$(1.2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(\xi_n, g_u, x-u)\, du = S_n(f, x).$$

Démonstration. En vertu d'un théorème bien connu

$$(1.3) \qquad U_n(\xi_n, g_u, x-u) = \sum_{x_i \in \xi_n}' f(u+x_i)\, P_i(\xi_n, x-u),$$

où $P_i(\xi_n, t)$ est un polynome trigonometrique en t d'ordre n. On en obtient immédiatement la première partie du théorème. D'autre part on a

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(\xi_n, g_u, x-u)\, du &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(\xi_n, g_u - S_n(g_u), x-u)\, du + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(\xi_n, S_n(g_u), x-u)\, du = A_n + B_n. \end{aligned}$$

---

[1]) G. FABER, Über die interpolatorische Darstellung stetigen Funktionen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **23** (1914), p. 192—210.

Or d'après (1. 3) on a

$$(1.5)\qquad A_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{x_i \in \xi_n} \int_0^{2\pi} \{f(u+x_i) - S_n(g_u, x_i)\} P_i(\xi_n, x-u)\, du = 0,$$

car les $2n+1$ premiers coefficients de $f(u+x_i) - S_n(g_u, x_i)$ sont égals à zéro. Et comme $S_n(g_u, t)$ désigne un polynome trigonométrique d'ordre n on a :

$$(1.6)\qquad S_n(g_u, x-u) = S_n(f, x) = U_n(\xi_n, S_n(g_u), x-u)$$

donc

$$(1.7)\qquad B_n = S_n(f, x).$$

Les formules (1. 4) et (1. 5) et (1. 7) donnent (1. 2).

L'idée des fonctions $g_u(x)$ est due à M. L. Fejér[2]). A savoir, pour démontrer le théorème de Faber (voir 2), M. Fejér considère les polynomes $P(u+x)$, $P(x)$ étant un polynome arbitraire d'ordre n. Remarquons encore que la démonstration du théorème de Faber proposée dans cette note ne diffère pas essentiellement de celle de M. Fejér.

Les conséquences de la formule (1. 2) seront tirées dans une autre note.

2. En appliquant la formule (1. 2) il est facile d'obtenir le

Théorème 2 (de M. Faber). *Pour chaque suite $\{\xi_n\}$ on peut choisir une fonction $f(x)$ continue de période 2π de sorte que l'on ait*

$$(2.1)\qquad \limsup_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 2\pi} |U_n(\xi_n, f, x)| = \infty.$$

Démonstration. Posons

$$(2.2)\qquad L_n = L_n(\xi_n) = \max |U_n(\xi_n, f, x)|,$$

où le maximum est pris pour toutes les fonctions f, vérifiant la condition $|f| \leq 1$ et $0 \leq x \leq 2\pi$. En posant dans la formule (1. 2) $x = 0$ on en tire

$$(2.3)\qquad L_n \geq \max |S_n(f)| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(n+{}^1/_2)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| dx,$$

le maximum étant pris pour toutes les fonctions soumises à l'unique

---

[2]) L. Fejér, Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle u. s. w., *Math. Zeitschrift*, 32 (1930), p. 426—457.

condition $|f| \leqq 1$. D'après la définition du nombre L_n il existe une fonction $f_n(x)$ continue telle que l'on ait

$$(2.4) \qquad |f_n| \leqq 1$$

$$(2.5) \qquad \max_{(x)} |U_n(f_n, x)| \geqq \frac{1}{2} L_n \geqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(n+{}^1\!/\!_2)\,x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| dx \to \infty.$$

D'autre part il est évident que

$$(2.6) \qquad L_n < \infty \qquad n = 1, 2, \ldots$$

On prouve facilement que la fonction

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} L_{n_i}^{-1/2} f_{n_i}(x)$$

verifie la formule (2. 1) dès que la suite n_i croît assez rapidement.

Comme complément du théorème 2 nous allons prouver le

Théorème 3. *La fonction continue f étant donnée on peut choisir une suite $\{\xi_n\}$ de sorte que la suite $U_n(\xi_n, f, x)$ soit convergente uniformément vers $f(x)$.*

Démonstration. Désignons par $U_n(f, x)$ le polynome trigonométrique d'ordre n réalisant l'approximation minimum de la fonction f. D'après un théorème connu[3]) il y a $2n+2$ points x_i', $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n+1$, $0 \leqq x_0' < x_1' < \ldots < x_{2n+1}' < 2\pi$ dans lesquels l'écart $f - U_n(f, x)$ atteint ses valeurs extrémales en changeant le signe d'un point au suivant. Il en résulte qu'il existe au moins $2n+1$ points x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$, $0 \leqq x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$, dans lesquels la fonction $f - U_n(\xi_n, x)$ s'annulle. Il est évident que ce système de points vérifie la thèse du théorème.

3. L'existence de la limite $U(x) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(\xi_n, f, x)$ et la continuité de la fonction f n'entraîne point en général l'égalité $U(x) = f(x)$. Nous allons établir à ce sujet le

Théorème 4. *Si pour un certain point y de continuité de f*

$$(3.1) \qquad \liminf_{n\to\infty} L_n \,.\, n \,.\, (y, \xi_n) = 0$$

où $(y, \xi_n) = \min\limits_{x_i \in \xi_n} |y - x_i|$, *et si la suite $U_n(f, y)$ converge vers $U(y)$ alors on a*

$$(3.2) \qquad U(y) = f(y).$$

3) Voir p. ex. C. de la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* (Paris, 1919), p. 95.

D é m o n s t r a t i o n. D'après (3. 1) il existe une suite $\{n_i\}$ telle que

(3. 3) $$L_{n_i} \cdot n_i \cdot (y, \xi_{n_i}) \to 0.$$

En tenant compte de la définition de L_n on a

(3. 4) $$\max_{(x)} |U_n(\xi_n, f, x)| \leqq \max |f| \cdot L_n$$

et d'après l'inégalité bien connu de M. S. BERNSTEIN

(3. 5) $$\max_{(x)} \left| \frac{d}{dx} U_n(\xi_n, f, x) \right| \leqq n \cdot \max_{(x)} |f| \cdot L_n.$$

Soit $|y-x_j| = (y, \xi_{n_i})$, $x_j \in \xi_{n_i}$, alors

(3. 6) $$U_{n_i}(\xi_{n_i}, f, y) = U_n(\xi_{n_i}, f, x_j) + (y - x_j) \frac{d}{dx} U_n(\xi_{n_i}, f, \theta) =$$
$$= f(x_j) + O(n_i L_{n_i}(y, \xi_{n_i})) = f(x_j) + o(1) = f(y) + o(1).$$

A titre d'application du théorème 4 considérons la suite

$$x_i = i\frac{\pi}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n-1, \quad \xi_n = (x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}).$$

On sait qu'il y a un polynome unique

$$a_0 + \sum_{1}^{n-1} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) + a_n \cos nx$$

vérifiant les $2n$ équations

(3. 7) $$U\left(f, i\frac{\pi}{n}\right) = f\left(\frac{i\pi}{n}\right), \qquad i = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

En désignant par L_n l'expression analogue à (2. 2), on a

(3. 8) $$L_n \leqq A \log n + B,$$

où A et B désignent deux constantes absolues. D'autre part, d'après un théorème connu de KRONECKER concernant l'approximation des nombres réels par des nombres rationels

(3. 9) $$\liminf_{n \to \infty} (x, \xi_n) \cdot n^2 = O(1).$$

Donc

(3. 10) $$\liminf_{n \to \infty} (x, \xi_n) \cdot n \cdot L_n = 0.$$

En supposant l'existence de la limite $U(x) = \lim U_n(\xi_n, x)$ et la continuité de la fonction f on en deduit l'égalité $U(x) = f(x)$.

(Reçu le 6 mars 1936)

Sur la divergence des polynomes d'interpolation.

Par J. MARCINKIEWICZ à Wilno.

1. Soit

$$x_i^{(k)} = \cos \frac{2i-1}{2k}\pi \qquad (1 \leqq i \leqq k,\ k=1,2,\ldots).$$

D'après un théorème classique, on peut définir un polynome

$$(1.\ 1) \qquad P_n(f,x) = P_n(x) = \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)} x + \ldots + \alpha_{n-1}^{(n)} x^{n-1}$$

de sorte que les n égalités suivantes soient vérifiées :

$$(1.\ 2) \qquad P_n(f, x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Le but de cette note est de démontrer le

Théorème. *On peut construire une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $(-1, 1)$, de sorte que la suite correspondante $\{P_n(f,x)\}$ diverge dans chaque point de l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$.*

On a démontré récemment qu'il existe une fonction continue $f(x)$ telle que la suite $P_n(f,x)$ diverge presque partout dans $(-1, 1)$.[1] Le théorème que nous venons d'énoncer est un peu plus général.

2. Le changement de variable

$$x = \cos\theta$$

transforme la fonction $f(x)$, définie dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ en une fonction $g(\theta) = f(\cos\theta)$, définie dans l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq \pi$.

---

[1]) G. GRÜNWALD, Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome, *ces Acta*, 7 (1935), pp. 207—221 ; J. MARCINKIEWICZ, Wielomiany interpolacyjne funkcyj bezwzględnie ciągłych (Les polynomes d'interpolation de fonctions absolument continues), *Wiadomości Matematyczne*, **39** (1935), p. 85—125 (ce travail représente ma thèse de doctorat). La méthode de démonstration que nous employons dans le présent travail est la même que celle du travail précédent. Voir aussi ma note : Sur l'interpolation, *Studia Math.*, **6** (1936), pp. 1—17.

Le polynome $P_n(f, x)$ devient un polynome trigonométrique

$$U_n(\theta) = U_n(g, \theta) = \frac{1}{2} a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \cos\theta + \ldots + a_{n-1}^{(n)} \cos(n-1)\theta$$

vérifiant les n égalités

$$(2.1) \quad U_n(\theta_i) = g(\theta_i) \quad \left(\theta_i = \theta_i^{(n)} = \frac{2i-1}{2n}\pi, \; i = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Inversement, la fonction $g(\theta)$ étant définie pour $0 \leqq \theta \leqq \pi$, la fonction $f(x) = g(\operatorname{arc}\cos x)$ se trouve définie pour $-1 \leqq x \leqq 1$, et le polynome trigonométrique $U_n(g, \theta)$, défini par les égalités (2.1), devient le polynome $P_n(x)$. Par conséquent, pour démontrer le théorème, il suffit de construire une fonction $g(\theta)$ continue dans $(0, \pi)$ et telle que la suite $U_n(g, \theta)$ soit partout divergente.

3. Posons

$$(3.1) \qquad g(-\theta) = g(\theta) \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi),$$

$$(3.2) \qquad \varphi_n(\theta) = \theta_i^{(n)} \qquad (\theta_i^{(n)} \leqq \theta < \theta_{i+1}^{(n)}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Les formules bien connues

$$(3.3) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\theta \, d\varphi_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin k\theta \, d\varphi_n(\theta) = 0 \qquad (0 < k < 2n)$$

donnent

$$(3.4) \qquad a_i^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos i\theta \, d\varphi_n(\theta),$$

donc aussi

$$(3.5) \qquad U_n(g, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \frac{\sin n(\theta - x)}{2 \operatorname{tg} \frac{\theta - x}{2}} d\varphi_n(\theta).$$

4. Le nombre p étant choisi, nous allons construire une fonction continue $g(\theta) = g_p(\theta)$, de manière que l'on ait

(α) $g(-\theta) = g(\theta)$, $|g(\theta)| \leqq 1$, $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$;

(β) *la suite* $\{U_n(g, \theta)\}$ *converge uniformément*

(γ) *pour chaque* x, $1/p \leqq x \leqq \pi - 1/p$, *il existe un entier* $n = n(x)$ *tel que* $|U_{n(x)}(g, x)| > p$.

Choisissons m assez grand pour que

$$(4.1) \qquad \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m} + \frac{1}{p}} \frac{d\varphi_n(\theta)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta} \geqq M,$$

dès que $n \geqq m$, et soient $n_1, n_2, \ldots, n_m$ des nombres entiers définis de sorte que l'on ait

$$m \leqq n_1 < n_2 < \ldots < n_m,$$

$$2mn_i^3 < n_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{4.2}$$

Pour chaque n, désignons par S_n le système de n points

$$\theta_i^{(n)} = \frac{2i-1}{2n}\pi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et par $S_n(u)$ le produit de S_n par l'intervalle (u, π).

Nous définirons maintenant la fonction $g(\theta)$ dans S_{n_1}. Posons

$$\begin{aligned} &g(\theta_i^{(n_1)}) = (-1)^i \quad \text{pour} \quad \theta_i^{(n_1)} \in S_{n_1}\left(\frac{\pi}{m}\right), \\ &g(\theta^{(n_1)}) = 0 \qquad \text{pour} \quad \theta_i^{(n_1)} \in S_{n_1} - S_{n_1}\left(\frac{\pi}{m}\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Comme $S_{n_1} . S_{n_1+1} = 0$, nous pouvons de même définir la fonction $g(\theta)$ dans S_{n_1+1}. Soit donc

$$\begin{aligned} &g(\theta_i^{(n_1+1)}) = (-1)^i \quad \text{pour} \quad \theta_i^{(n_1+1)} \in S_{n_1+1}\left(\frac{\pi}{m}\right), \\ &g(\theta_i^{(n_1+1)}) = 0 \qquad \text{pour} \quad \theta_i^{(n_1+1)} \in S_{n_1+1} - S_{n_1+1}\left(\frac{\pi}{m}\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Supposons maintenant que $g(\theta)$ est déjà définie pour $\theta \in S_{n_i} + S_{n_i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. La fonction $g(\theta)$ est ainsi définie dans certains points de S_{n_k}, à savoir dans les points de l'ensemble

$$P_{n_k} = S_{n_k} . \sum_{i=1}^{k-1} (S_{n_i} + S_{n_i+1}).$$

(Il n'est pas exclu que P_{n_k} est vide.) Posons

$$\begin{aligned} &g(\theta_i^{(n_k)}) = (-1)^i \quad \text{pour} \quad \theta_i^{(n_k)} \in S_{n_k}\left(\frac{k}{m}\pi\right) - P_{n_k}, \\ &g(\theta_i^{(n_k)}) = 0 \qquad \text{pour} \quad \theta_i^{(n_k)} \in S_{n_k} - \left\{S_{n_k}\left(\frac{k}{m}\pi\right) + P_{n_k}\right\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

et d'une façon analogue, en vertu de l'égalité $S_{n_k} . S_{n_k+1} = 0$,

$$\begin{aligned} &g(\theta_i^{(n_k+1)}) = (-1)^i \quad \text{pour} \quad \theta_i^{n_k+1} \in S_{n_k+1}\left(\frac{k}{m}\pi\right) - P_{n_k+1}, \\ &g(\theta_i^{(n_k+1)}) = 0 \qquad \text{pour} \quad \theta_i^{n_k+1} \in S_{n_k+1} - \left\{S_{n_k+1}\left(\frac{k}{m}\pi\right) + P_{n_k+1}\right\}, \end{aligned}$$

où

$$P_{n_k+1}=S_{n_k+1}\sum_{i=1}^{k-1}(S_{n_i}+S_{n_i+1}).$$

On définit la fonction $g(\theta)$ par récurrence pour $\theta\in S_{n_i}+S_{n_i+1}$ $(i=1,2,\ldots,m-1)$. En déhors de ces points nous pouvons définir la fonction $g(\theta)$ d'une façon arbitraire, pourvu qu'elle satisfasse aux conditions (α) et (β).

Soit

$$\frac{1}{p}\leqq x\leqq\pi-\frac{1}{p},\qquad \frac{k-1}{m}\pi\leqq x<\frac{k}{m}.$$

D'après (3. 5) on obtient

$$\begin{aligned}
U_{n_k}(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta)\frac{\sin n_k(\theta-x)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-x)}d\varphi_{n_k}(\theta)=\\
&=\frac{\cos n_k x}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta)\frac{\sin n_k\theta}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-x)}d\varphi_{n_k}(\theta)=\\
&=\frac{\cos n_k x}{\pi}\int_{0}^{\pi}g(\theta)\frac{\sin n_k\theta}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-x)}d\varphi_{n_k}(\theta)+O(p)=\\
&=\frac{\cos n_k x}{\pi}\int_{S_{n_k}-P_{n_k}}g(\theta)\frac{\sin n_k\theta}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-x)}d\varphi_{n_k}(\theta)+\frac{\cos n_k x}{\pi}\int_{P_{n_k}}+O(p).
\end{aligned}\tag{4. 6}$$

D'autre part, en évaluant la distance minimum de deux points consecutifs de P_{n_k}, on voit qu'il y a deux points de P_{n_k} au plus dont la distance de x soit inférieure à $({}^1/n_{k-1})^2$. Il en résulte, d'aprés l'inégalité (4. 2), que

$$\int_{P_{n_k}}=O(1).\tag{4. 7}$$

La formule (4. 5) donne

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{S_{n_k}-P_{n_k}}g(\theta)\frac{\sin n_k\theta}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-x)}d\varphi_{n_k}(\theta)\right|=\\
&=\int_{S_{n_k}\left(\frac{k\pi}{m}\right)-P_{n_k}}\frac{d\varphi_{n_k}(\theta)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-x)}\geqq\int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m}+\frac{1}{p}}\frac{d\varphi_{n_k}(\theta)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}+O(1).
\end{aligned}\tag{4. 8}$$

Des formules (4. 1), (4. 6), (4. 7) et (4. 8) on obtient

$$(4.9) \qquad |U_{n_k}(x)| \geqq \frac{1}{\pi} |\cos n_k x| M + O(p).$$

D'une façon analogue, on obtient aussi pour $\frac{1}{p} \leqq x \leqq \pi - \frac{1}{p}$; $(k-1)\frac{\pi}{m} \leqq x \leqq \frac{k\pi}{m}$,

$$(4.10) \qquad |U_{n_k+1}(x)| \geqq \frac{1}{\pi} |\cos(n_k+1)x| M + O(p).$$

Or, en tenant compte de l'égalité

$$\sin x = \cos nx \sin(n+1)x - \sin nx \cos(n+1)x,$$

on obtient que pour $\frac{1}{p} \leqq x \leqq \pi - \frac{1}{p}$,

$$(4.11) \qquad \operatorname{Max}\{|\cos nx|, |\cos(n+1)x|\} > \frac{1}{4p}.$$

On en déduit, d'aprés (4. 9) et (4. 10) que

$$(4.12) \qquad \operatorname{Max}\{|U_{n_k}(x)|, |U_{n_k+1}(x)|\} \geqq \frac{M}{4p\pi} + O(p).$$

Pour M assez grand cette dernière inégalité implique la condition (γ).

5. La reste de la démonstration est simple. En tenant compte des conditions (α), (β) et (γ) on voit que si la croissance de la suite $\{p_i\}$ est suffisamment rapide, la fonction

$$g(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i^{-1/2} g_{p_i}(\theta)$$

est continue et la suite $U_n(g, \theta)$ diverge partout dans $(0, \pi)$, sauf peut-être dans les points extrêmes 0 et π.

Si la suite $U_n(g, \theta)$ convergeait dans le point $\theta = 0$, on pourrait ajouter à g une fonction $g_1(\theta)$ continue et paire, telle que $U_n(g_1, \theta)$ diverge pour $\theta = 0$ et converge ailleurs. On peut procéder de même avec le point $\theta = \pi$. On obtient ainsi une fonction continue g telle que $U_n(g, \theta)$ diverge partout dans l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq \pi$.

(Reçu le 6 mars 1936)

Über eine Zerlegung der ebenen Kurven vom Maximalindex.

Von JULIUS (GYULA) V. SZ. NAGY in Szeged.

1. Einleitung.

Wir verstehen unter einer einzügigen Kurve ein reelles eindeutiges Kreisbild in der projektiven Ebene, welches überall eine Tangente besitzt und Summe von endlich vielen Konvexbogen ist. Eine Kurve kann aus mehreren Zügen bestehen, ihre Züge sind dann einzügige Kurven in der Ebene. Die Ordnung bzw. der Index einer Kurve ist die größte bzw. kleinste Anzahl der Punkte, in denen die Kurve von einer Geraden ihrer Ebene getroffen werden kann. Ähnlicherweise läßt sich die Klasse bzw. der Klassenindex der Kurve definieren.

Eine Kurve K n-ter Ordnung zerfällt in die Kurven K_1, $K_2, \ldots, K_h$ von n_1-, n_2-,..., n_h-ter Ordnung, wenn $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_h$ ist und wenn diese h Kurven zusammen jeden Zug der Kurve K enthalten und zwar jeden nur einmal. Zerfällt die Kurve K bei keinerlei Einteilung ihrer Züge, oder ist sie einteilig, so ist sie irreduzibel. Auf eine ähnliche Weise läßt sich die Irreduzibilität bzw. Reduzibilität für eine Kurve C n-ter Klasse definieren.

Besteht eine irreduzible Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex (vom Klassenindex $n-2$) aus den s Zügen Z_1, $Z_2, \ldots, Z_s$, so bilden die Punkte der Ebene, die an die Kurve C $n-2$ Tangenten senden, ein zusammenhängendes Gebiet, das von den s Zügen und von der eventuellen einzigen Wendetangente der Kurve begrenzt wird. Ist $p+1$ die Zusammenhangszahl dieses Gebietes, so ist p das Geschlecht der Kurve C. Zerfällt C in die irreduziblen Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_k$, so sind diese Kurven alle vom Maximalklassenindex. Die Punkte der Ebene, aus denen man an C

$n-2$ Tangenten ziehen kann, bilden k mit einander nicht zusammenhängende Gebiete $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Das Gebiet G_i wird von den Zügen der Kurve C_i und von ihrer eventuellen Wendetangente begrenzt. Ist C_i vom Geschlecht p_i, so ist die Kurve C vom Geschlecht $p=p_1+p_2+\ldots+p_k-k+1$[1]).

Das Geschlecht einer Kurve vom Maximalindex bedeutet das Geschlecht ihrer dualen Kurve (die vom Maximalklassenindex ist). Das Geschlecht p der Kurven n-ter Ordnung vom Maximalindex, die d Doppelpunkte und r Spitzen ($r=0$ oder 1) haben, läßt sich auch durch die Gleichung

$$p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d-r$$

definieren[2]).

Ist M ein Zug einer Kurve K mit einem Doppelpunkt Q, so wird er von Q in zwei Pseudozüge zerlegt. Der eine Pseudozug ist der geschlossene Teil von M, welcher von einem Punkte P durchlaufen wird, während P von Q ausgehend auf M zum ersten Male zur Anfangslage Q zurückkehrt. Der andere geschlossene Teil von M ist der komplementäre Pseudozug. Hat der eine Pseudozug noch Doppelpunkte, so läßt er sich in weitere Pseudozüge zerlegen. Mann kann also den Zug M in Pseudozüge ohne Doppelpunkte zerlegen. Hat der Zug M in Q einen gewöhnlichen m-fachen Punkt, so hat der komplementäre Pseudozug in Q einen $(m-1)$-fachen Punkt. Dieser Pseudozug läßt sich von Q ausgehend in solche $m-1$ Pseudozüge zerlegen, die im Punkte Q Winkelpunkte, aber keinen Doppelpunkt haben.

---

[1]) Vgl. die folgenden Arbeiten von Julius v. Sz Nagy:

A) Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex, *Math. Annalen,* **89** (1923), S. 32—75; **90** (1924), S. 152—153.

B) Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve vom Maximal-Klassenindex, *Math. Annalen,* **100** (1928), S. 164—178.

C) Über die Züge der ebenen Kurven vom Maximal-Klassenindex, *Math. Annalen,* **100** (1928), S. 179—187.

D) Über die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, *Math. Zeitschrift,* **35** (1932), S. 80—92.

E) Über die Ungleichungen für die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, *Math. Zeitschrift,* **37** (1933), S. 493—513.

F) Über die irreduziblen ebenen Kurven von Maximalindex, *diese Acta,* **3** (1927), S. 96—106.

Diese Arbeiten werden im Folgenden unter *A—F* zitiert werden.

[2]) Vgl. *B,*

Schneiden die Züge oder Pseudozüge M_1 und M_2 einander im Punkte Q, so kann man sie in einen Pseudozug vereinigen. Man schneidet M_1 und M_2 im Punkte Q hindurch und verbindet sie dann in einen geschlossenen Pseudozug. Diese Verbindung kann offenbar auf zweierlei Arten stattfinden.

Wir nennen das vorige Verfahren, wodurch der Doppelpunkt Q der Kurve K in zwei Winkelpunkte überführt wird, einen *Durchschnitt* des Doppelpunktes.

Nach unserer Definition ist ein Pseudozug keine eigentliche Kurve, weil er auch Winkelpunkte hat. Er läßt sich aber durch die Abrundung[3]) seiner Winkelpunkte in eine eigentliche Kurve überführen. Ist AB ein den im Endlichen liegenden Winkelpunkt Q enthaltender genügend kleiner Bogen des Pseudozuges, der außer Q keine Singularitäten hat, und ersetzt man diesen Bogen durch einen Konvexbogen (mit stetigen Tangenten), der innerhalb des vom Bogen AB und von der Strecke AB begrenzten endlichen Gebiet liegt und den Pseudozug in A und B berührt, so wird damit der Winkelpunkt Q abgerundet. Die Abrundung eines im Unendlichfernen liegenden Winkelpunktes läßt sich projektiv definieren.

Zerlegt man die Kurve K vom Maximalindex durch Durchschnitte einiger Doppelpunkte in Züge und Pseudozüge ohne Doppelpunkte und rundet man die erhaltenen Winkelpunkte ab, so bilden die so erhaltenen Züge eine Kurve, die im Allgemeinen nicht vom Maximalindex ist. Es gilt aber der folgende Satz[4]):

Jede ebene Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht p, die r Spitzen ($r=0$ *oder* 1) *hat, läßt sich durch Durchschnitte ihrer gewissen* $n-2-r-p$ *Doppelpunkte in* $n-2$ *Züge oder Pseudozüge dritter Ordnung zerlegen. Im Falle* $r=0$ *bzw.* $r=1$ *kann die Kurve noch einen bzw. keinen Zug oder Pseudozug zweiter Ordnung haben. Die Winkelpunkte der erhalte-*

[3]) C. Juel, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, *D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter* (7), Naturv. og Math. Afd., XI. 2 (1914), S. 113–166, insb. 136.

[4]) Für irreduzible Kurven vom Maximalindex und für den Fall $r=0$ wurde dieser Satz in der Arbeit F bewiesen. Der Beweis läßt sich auch für den Fall $r=1$ leicht ergänzen, wenn man in Betracht zieht, daß eine aus Ovalen und aus Zügen dritter Klasse bestehende irreduzible Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex vom Geschlecht $n-3$ ist und kein Oval hat, falls C eine Wendetangente besitzt, Vgl. F, S. 106.

nen Pseudozüge lassen sich so abrunden, daß die so entstandene Kurve n-ter Ordnung den Maximalindex und das Geschlecht $n-2-r$ *hat.*[5])

2. Über die Doppelstrecken der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex.

Wird die ebene Kurve C n-ter Klasse und vom Maximalklassenindex von der Geraden g in den Punkten A und B berührt und enthält die (endliche oder unendliche) Strecke AB im Innern keinen Punkt der Kurve, so wird die Strecke AB eine *Doppelstrecke* genannt. Eine Doppelstrecke ist von erster bzw. zweiter Art, je nachdem die Berührungspunkte A und B auf einem Zuge bzw. auf verschiedenen Zügen von C liegen. Die Definition der Doppelstrecken läßt sich projektiv verallgemeinern.

Die Ebene wird von der Kurve C und von ihrer eventuellen einzigen Wendetangente in gewisse Gebiete geteilt. Aus jedem Punkte eines Gebietes geht dieselbe Anzahl von Tangenten an die Kurve. Wir bezeichnen mit $G_1, G_2, \ldots, G_k$ bzw. mit $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ die Gebiete, deren Punkte an die Kurve C $n-2$ bzw. n Tangenten senden. Aus den Punkten des Gebietes T_i erreicht man die konvexe Seite der Konvexbogen der Kurve C, die am Rande von T_i liegen. Die Doppelstrecken der Kurve C liegen also alle in den Gebieten T_i.

Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

I. *Bilden die Punkte der Ebene, die an die Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex n Tangenten senden, die Gebiete* $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$, *und enthält der Rand* Γ_i *von* T_i *mindestens zwei Züge von C oder mindestens einen Zug mit Doppeltangenten, so hat die Kurve C in* T_i *mindestens eine Doppelstrecke.*

---

[5]) Dieser Satz läßt sich auch auf den Fall verallgemeinern, daß die Kurve K endlichviele Winkelpunkte besitzt. Wir gehen aber auf diese Verallgemeinerung nicht näher ein. — Der Begriff des Index einer Kurve wurde in der Arbeit von O. HAUPT, Über ebene Bogen und Kurven vom Maximalindex im weiteren Sinne, *Sitzungs-Berichte d. Bayerischen Akademie d. Wissenschaften,* Math.-phys. Klasse, 1935, S. 37—70 erweitert. Dort wurden die ebenen Bogen vom Maximalindex in der Literatur erst untersucht. — Die Frage, ob unser Satz sich auch für ebene Bogen vom Maximalindex oder für ebene Kurven vom Maximalindex in weiterem Sinne ausdehnen läßt, müssen wir offen lassen.

Wir nehmen an, daß der Zug Z von C am Rande Γ_1 des Gebietes T_1 liegt. Für den Beweis des Satzes müssen wir nur zeigen, daß T_1 dann und nur dann keine Doppelstrecken von C enthält, wenn es vom Zuge Z und von seiner eventuellen Wendetangente vollständig begrenzt wird und wenn Z keine Doppeltangente besitzt.

Wir bezeichnen die Tangente von Z in einem Punkte P mit t. Wir können annehmen, daß Γ_1 von der Tangente t_0 des Zuges Z außerhalb des Berührungspunktes P_0 in mindestens zwei Punkten getroffen wird.

Die Kurve C kann nämlich höchstens einen unpaaren Zug haben und dieser eventuelle unpaare Zug bildet mit seiner Wendetangente zusammen eine paare Kurve. Daraus folgt, daß Γ_1 von jeder gewöhnlichen Tangente t des Zuges Z außerhalb des Berührungspunktes P in einer geraden Anzahl der Punkte getroffen wird. Wird nun Γ_1 außerhalb des Punktes P von keiner Tangente t getroffen, so wird T_1 offenbar vom Oval Z vollständig begrenzt. Das Gebiet T_1 fällt mit dem Äußeren dieses Ovals, d. h. mit dem Gebiete überein, dessen Punkte an Z zwei Tangenten senden. T_1 enthält also in diesem Falle keine Doppelstrecke. Wir können also diesen Fall außer Acht lassen, weil der Satz I in diesem Falle offenbar immer gilt.

Wir nehmen nun an, daß T_1 keine Doppelstrecke von C enthält und bezeichnen die in T_1 liegende und den Punkt P enthaltende größte Strecke der Tangente t mit QR. Die Punkte Q und R liegen auf Γ_1. In einer Spitze oder in dem eventuellen Wendepunkte von Z fällt Q oder R mit P zusammen.

Bewegt sich der Punkt P vom Punkte P_0 ausgehend auf Z immer in demselben Sinne, so bewegt sich der Punkt Q bzw. R auf Γ_1 stetig und in demselben Sinne. Die Punkte Q und R können nicht zusammenfallen.

Die stetige Bewegung des Punktes Q hört während der Bewegung von P offenbar nur dann auf, wenn die Teilstrecke PQ der Strecke QR entweder eine Doppelstrecke ist, oder eine Doppelstrecke enthält, weil man aus einem inneren Punkte des Gebietes T_1 die konvexe Seite der Konvexbogen von Γ_1 erreicht. Dies ist aber unmöglich, weil es in T_1 — nach der Annahme — keine Doppelstrecken von C gibt. Der Punkt Q kann während der einsinnigen Bewegung von P seinen Bewegungssinn nicht verändern.

Änderte sich nämlich Q seinen Bewegungssinn im Punkte Q', so wäre die entsprehende Strecke $P'Q'$ eine Doppelstrecke, weil C von der Tangente t' des Punktes P' auch im Punkte Q' berührt würde. Fielen die Punkte Q und R auf einer Tangente t zusammen, so wäre die entsprechende Strecke PQ eine Doppelstrecke.

Das von der Strecke QR beschriebene Gebiet T der Ebene, wenn Z vom Punkte P durchlaufen wird, ist offenbar ein Teilgebiet von T_1. Wir werden aber zeigen, daß die Gebiete T und T_1 identisch sind, weil jeder innere Punkt S^* von T_1 auch ein Punkt von T ist.

Man kann den Punkt S^* und einen Punkt S_0 von Z durch eine im Innern des Gebietes T_1 liegende offene Kurve γ verbinden, weil T_1 zusammenhängend ist. Bewegt sich nun ein Punkt S von S_0 ausgehend auf γ bis zum Punkte S^*, so sendet S in jeder Lage an Z dieselbe Anzahl der Tangenten, weil S während der Bewegung weder Z, noch seine Wendetangente durchschreitet. Wir nehmen die Veränderung derjenigen beiden von S ausgehenden Tangenten t_1 und t_2 von Z in Betracht, die im Anfangspunkte S_0 zusammenfallen. Liegt S dem Punkte S_0 genügend nahe und bezeichnet P_1 bzw. P_2 den Berührungspunkt von Z mit t_1 bzw. t_2, so ist es klar, daß die Strecken SP_1 und SP_2 im Gebiet T liegen. Die Strecken SP_1 und SP_2 haben auch dann keinen inneren Punkt mit Γ_1 gemeinsam, wenn S irgendein Punkt von γ ist. Im entgegengesetzten Falle enthielte nämlich die erste Strecke SP_1 oder SP_2, die einen inneren Punkt mit Γ_1 gemeinsam hat, eine Doppelstrecke von C, die in T_1 liegt. Aus diesem Widerspruch folgt, daß es eine Strecke QR gibt, die den Punkt S^* in sich enthält. Der Punkt S^* liegt also auch in T.

Wir müssen die folgenden zwei Möglichkeiten untersuchen: *a)* die Punkte Q und R liegen beide auf dem Zuge Z oder auf seiner eventuellen Wendetangente; *b)* der Punkt R liegt auf einem anderen Zuge Z' (oder auf seiner eventuellen Wendetangente).

Im Falle *a)* ist T_1 vom Zuge Z und von ihrer eventuellen Wendetangente begrenzt und fällt mit dem Gebiete T der Ebene überein, dessen Punkte an die einzügige Kurve Z vom Maximalklassenindex die maximale Anzahl der Tangenten senden. In diesem Gebiete gibt es nur dann keine Doppelstrecke, wenn Z keine Doppeltangente besitzt[6]).

[6]) Vgl. *F.*

Im Falle *b)* ist der Zug Z' ein Oval, weil er eine Kurve vom Maximalklassenindex ohne Spitze ist. Der Punkt R kann nämlich auf der Tangente t des Punktes P auf Z mit keinem Punkte der Kurve C zusammenfallen, weil er vom Punkte P verschieden ist. Der Zug Z' hat also keine Spitze und ist deshalb ein Oval. Das Oval Z' wird von keiner Tangente t von Z berührt. Dies ist aber unmöglich, weil die Züge Z und Z' eine reduzible Kurve vom Maximalklassenindex bilden, die also soviele gemeinsame Tangenten besitzen, wie das Produkt ihrer Klassen ist.[7]) (Die Reduzibilität der aus Z und Z' bestehenden Kurve C^* folgt daraus, daß die Punkte der Ebene, aus denen die minimale Anzahl der Tangenten an C gehen, zwei mit einander nicht zusammenhängende Gebiete bilden, nämlich die Gebiete, deren Punkte an Z bzw. Z' die minimale Anzahl der Tangenten senden.)

Aus dem Satze I folgt, daß eine reduzible Kurve C vom Maximalklassenindex immer Doppelstrecken besitzt. Sind nämlich $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ die Gebiete der Ebene, deren Punkte n Tangenten an die Kurve C n-ter Klasse senden, so gibt es mindestens ein Gebiet T_i, dessen Rand mindestens zwei Züge von C enthält. Widrigenfalls wäre das nach der Heraushebung von $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ gebliebene Gebiet G der Ebene zusammenhängend. Dann wäre aber die Kurve C — gegen unsere Annahme — irreduzibel.

3. Fortsetzung. Doppelstrecke als Querschnitt in einem Gebiet. Umformung einer Kurve vom Maximalklassenindex durch eine Doppelstrecke.

Liegt eine Doppelstrecke q mit den Endpunkten A und B im Gebiet T_1 und schließt man sie der Kurve C vom Maximalklassenindex doppelt bei, so kann man die Doppelstrecke q als die zwei Ufer des unendlich schmalen Querschnittes q im Gebiet T_1 betrachten. Die Endpunkte A und B von q liegen auf einem Zug Z bzw. auf zwei verschiedenen Zügen Z und Z', je nachdem q eine Doppelstrecke erster bzw. zweiter Art ist. Die Gebiete der Ebene, deren Punkte an die Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex $n-2$ Tangenten senden, wurden von uns mit $G_1, G_2, \ldots, G_k$ bezeichnet. Ist G_1 bzw. G_2 dem Gebiet T_1 längs des Zuges Z bzw. Z' benachbart, so ist der Querschnitt q

[7]) Vgl. *D.*

des Gebietes T_1 für das Gebiet G_1 bzw. für die Gebiete G_1 und G_2 eine Brücke, durch die die Randpunkte A und B von G_1 bzw. von G_1 und G_2 verbunden werden.

Ist p_i+1 die Zusammenhangszahl des Gebietes G_i, so kann das Geschlecht p des Systems der k Gebiete G_i durch die Gleichung

$$p=p_1+p_2+\ldots+p_k-k+1$$

definiert werden.

Verbindet die Brücke q zwei Randpunkte des Gebietes G_1, so vermehrt sie die Zusammenhangszahl von G_1 um eins. Verbindet aber q je einen Randpunkt von G_1 und G_2, so vereinigt q die Gebiete G_1 und G_2 in ein Gebiet G_{12}, dessen Zusammenhangszahl offenbar $p_{12}+1=(p_1+1)+(p_2+1)-1=p_1+p_2+1$ ist. Die Brücke q verändert also in diesem Falle die Zahl $p_1+p_2=p_{12}$ nicht, sie ersetzt aber k durch $k-1$. In beiden Fällen wird also das Geschlecht p des Systems der k Gebiete G_i um eins vermehrt.

Die uneigentliche Kurve $\bar{C}$, in welche die Kurve C durch q verwandelt wird, läßt sich durch stetige Deformation in eine eigentliche Kurve C' vom Maximalklassenindex überführen[8]). Wir ersetzen die Doppelstrecke $q=AB$ und die dieser Strecke in den Endpunkten anschließenden genügend kleinen Konvexbogen AA_1 und BB_1 bzw. AA_2 und BB_2 von C durch einen Konvexbogen A_1B_1 bzw. A_2B_2 mit stetigen Tangenten. Diese Konvexbogen liegen in dem längs des Querschnittes q zerschnittenen Gebiete T_1, schmiegen sich an die Ufer von q genügend an, haben mit einander und außerhalb der Endpunkte mit der Kurve C keinen gemeinsamen Punkt und berühren die Kurve C in den Punkten A_1 und B_1 bzw. A_2 und B_2. Die ersten vier Figuren zeigen hinreichend deutlich die möglichen Formen der Kurven $\bar{C}$ und C' in der Nähe der endlichen Doppelstrecke AB, wenn die Doppelstrecke nicht auf der eventuellen Wendetangente von C liegt. Die Konvexbogen A_1B_1 und A_2B_2 sind in den Figuren punktierte Linien. Die Kurve C' enthält die Bogen A_1AA_2 und B_1BB_2 der Kurve C nicht.

Hat die Kurve C die Wendetangente w, so kann eine Doppelstrecke AB auf dieser Wendetangente, also an der Grenze eines Gebietes G_i liegen. Die Kurve C kann von ihrer Wendetangente ausserhalb des Wendepunktes A nicht geschnitten wer-

[8]) Vgl. F, S. 104–105.

den, weil sie vom Maximalklassenindex ist. Die Kurve C hat in der Nähe der Doppelstrecke AB die Form der Figur 5. (Wäre nämlich der den Berührungspunkt B enthaltende genügend kleine Konvexbogen B_1B_2 auf der anderen Seite von w, wie in der Figur, so könnte man von der konkaven Seite der Kurve ihre konkave Seite erreichen, ohne die Kurve oder ihre Wendetangente überschreiten zu müssen.)

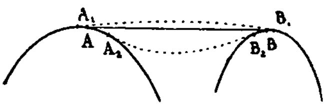

Fig. 1.

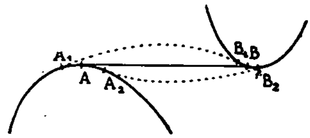

Fig. 2.

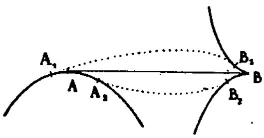

Fig. 3.

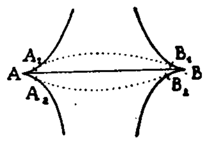

Fig. 4.

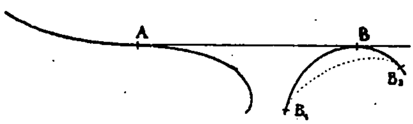

Fig. 5.

Ersetzt man in der Figur 5 den Konvexbogen B_1B_2 durch den punktierten Bogen B_1B_2 mit denselben Endetangenten, so gelangt die Doppelstrecke in das Innere des Gebietes G_i. Dann läßt sich die erhaltene Doppelstrecke als Querschnitt durch zwei Konvexbogen ebenso ersetzen, wie in der Figur 1. Auf ähnliche Weise läßt sich der Fall, wo die Endpunkte der Doppelstrecke AB gewöhnliche Berührungspunkte an der Wendetangente sind, durch entsprechende Deformation der Kurve C erledigen.

Die Kurve C' ist vom Maximalklassenindex, weil man aus einem Punkte der Ebene entweder die konvexe oder die konkave Seite ihrer Konvexbogen erreichen kann, ohne die Kurve oder ihre eventuelle Wendetangente zu überschreiten. Die Kurven C und C' haben dieselben auf der Doppelstrecke q senkrecht stehenden Tangenten, daraus folgt, daß ihre Klassen übereinstimmen.

Aus der Definition des Geschlechts einer Kurve vom Maximalklassenindex folgt, daß C' eine Kurve vom Geschlecht $p+1$ ist, wenn p das Geschlecht von C ist. Hat die Kurve C bzw. C' r bzw. r' Spitzen, so ist $r' = r+2$[9]).

Hat auch die Kurve C' mindestens eine Doppelstrecke, so läßt sich eine ihrer Doppelstrecken durch das vorige Verfahren aufheben. Durch h-malige Anwendung dieses Verfahrens geht die Kurve C vom Geschlecht p in eine Kurve $C^{(h)}$ n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlecht $p+h$ über.

Hat $C^{(h)}$ keine Doppelstrecke, so ist sie irreduzibel und besteht aus $n-2$ Zügen dritter Klasse und aus einem oder keinem Oval. Dies folgt aus dem Satze I. Ein Zug einer Kurve vom Maximalklassenindex hat nämlich nur dann keine Doppeltangente, wenn er entweder eine Kurve dritter Klasse vom Geschlecht eins, oder eine Kurve dritter Klasse mit einer Wendetangente, oder ein Oval ist. Eine irreduzible Kurve vom Maximalklassenindex hat höchstens einen Zug vom Geschlecht null, also höchstens ein Oval oder einen Zug dritter Klasse mit einer Wendetangente. Die Summe der Klassenindizes bzw. die Summe der Geschlechter von den Zügen einer irreduziblen Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlecht p ist $n-2$ bzw. p[10]). Daraus folgt, daß die Kurve $C^{(h)}$ ohne Doppelstrecke und mit r Wendetangenten ($r=0$ oder 1) $n-2$ Züge dritter Klasse hat und vom Geschlecht $n-2-r$ ist. Im Falle $r=1$ hat $C^{(h)}$ kein Oval, im Falle $r=0$ kann sie aber ein Oval haben.

Daraus folgt, daß $p+h = n-2-r$, also $h = n-2-r-p$ ist. Es gelten also die folgenden Sätze:

II. *Die Gebiete der Ebene, deren Punkte an eine Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex $n-2$ Tangenten senden, lassen sich durch $n-2-r-p$ Doppelstrecken als Brücken in ein $(n-1-r)$-fach zusammenhängendes Gebiet G verbinden, wenn p das Geschlecht, r die Anzahl der Wendetangenten von C bedeutet. Die Ufer der angewandten Brücken lassen sich stetig so verändern, daß der Rand von G — die eventuelle Wendetangente abgerechnet — eine irreduzible Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlecht $n-2-r$ ist und $n-2$ Züge dritter Klasse und ein oder kein Oval enthält.*

[9]) Vgl. *B*.
[10]) Vgl. *B*.

III. *Eine Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex hat solche n—2—r—p Doppelstrecken, von denen keine zwei einander schneiden, wenn p das Geschlecht und r die Anzahl der Wendetangenten von C bedeutet. Nennt man zwei solche Doppelstrecken der Kurve C, die keinen gemeinsamen inneren Punkt haben, voneinander unabhängig, so gibt es unter den Doppelstrecken von C genau n—2—r—p unabhängige Doppelstrecken.*

4. Über die Kurven vom Maximalindex.

Ist K eine ebene Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex, so begrenzen die Tangenten des einen Doppelpunktes von K zwei Winkelräume. Wird K von jeder Geraden des einen Winkelraumes in n Punkten getroffen, so wird dieser Winkelraum ein *Doppelwinkel* der Kurve K genannt. Diese Definition läßt sich auch auf den Fall mehrfacher Punkte ausdehnen.

Auf Grund des Dualitätsprinzips folgt der in der Einleitung ausgesprochene Satz aus dem Satze II ohne Weiteres. Aus dem Satze III folgt der Satz:

Eine Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht p, die r Spitzen hat, hat genau n—2—r—p solche Doppelwinkel, von denen keine zwei gemeinsame Geraden enthalten.

(Eingegangen am 26. März 1936.)

Über die Zirkulation der ebenen Kurven vom Maximalindex.

Von JULIUS (GYULA) V. SZ. NAGY in Szeged.

In derselben Arbeit von CH. A. SCOTT[1]), wo der Begriff des Index für die ebenen Kurvén in der Literatur zuerst vorkommt, wurde auch der Begriff der Zirkulation der ebenen Kurven eingeführt. Die *Zirkulation*[2]) einer ebenen Kurve ist die Minimalanzahl der Punkte, in denen die Kurve von einer unpaaren Kurve der Ebene getroffen werden kann. Eine ebene unpaare Kurve ist — wie bekannt — ein Kreisbild, das von jeder Geraden der Ebene unpaarmal geschnitten wird. Die Zirkulation ist also eine rein topologische Eigenschaft der Kurve.

CH. A. SCOTT bemerkte, daß es ebene Kurven sechster Ordnung gibt, die den Index zwei und die Zirkulation null haben und daß es algebraische Kurven n-ter Ordnung gibt, für welche ebenso der Index, wie die Zirkulation $n-2$ ist[3]).

L. BRUSOTTI bewies[4]), daß jedes n-seitige Polygon der projektiven Ebene, das von jeder Geraden der Ebene in mindestens $n-2$ Punkten getroffen wird, die Zirkulation $n-2$ hat. Ein solches Polygon wird von den Verlängerungen der Seiten eines n-seitigen konvexen Polygons gebildet.

Wir beweisen jetzt den folgenden Satz:

---

[1]) CH. A. SCOTT, On the circuits of plane curves, *Transactions of the American Math. Society,* 3 (1902), S. 388—398.

[2]) A. a. O, S. 398.

[3]) A. a. O., S. 398.

[4]) L. BRUSOTTI, Sui poligoni del piano proiettivo aventi circulazione massima, *Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere* (2), 66 (1933), S. 1—8.

Jede ebene Kurve vom Maximalindex[5]) *hat zugleich die maximale Zirkulation* (die dem Index gleich ist).

Dieser Satz folgt aus dem Satze[6]) des Verfassers:

Jede ebene Kurve K n-ter Ordnung vom Maximalindex läßt sich durch Durchschnitte einiger von ihren Doppelpunkten in $n-2$ Züge und Pseudozüge dritter und in einen oder keinen Zug oder Pseudozug zweiter Ordnung zerlegen.

Jeder Pseudozug dritter Ordnung ist eine unpaare Kurve, er hat also mit jeder unpaaren Kurve Γ der Ebene mindestens einen gemeinsamen Punkt. Die Minimalanzahl der Punkte, in denen die Kurve K von einer unpaaren Kurve Γ getroffen werden kann, ist also $n-2$, weil diese Zahl mindestens $n-2$ ist und weil sie für gewisse unpaare Kurven, nämlich für die Geraden der Ebene genau $n-2$ ist.

(Eingegangen am 26. März 1936.)

---

5) Für die Definition der Kurven vom Maximalindex vgl. z. B. die Arbeit von Julius v. Sz. Nagy, Über die Ungleichungen für die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, *Math. Zeitschrift*, **37** (1933), S. 493—513 und die voranstehende Arbeit: Über eine Zerlegung der ebenen Kurven vom Maximalindex.

6) Vgl. die zweite Arbeit in der vorigen Fußnote.

La méthode de variation de Gauss et les fonctions sousharmoniques.

Par OTTO FROSTMAN à Lund.

Il s'agira ici de donner une nouvelle application de la méthode de variation due à GAUSS[1]) dont je me suis servi dans ma Thèse[2]) pour résoudre le problème du balayage dans la théorie du potentiel. L'application que nous avons en vue concerne les fonctions sousharmoniques ou surharmoniques et le théorème fondamental de M. F. RIESZ sur le rapport de ces fonctions aux potentiels[3]). En formant des moyennes successives de la fonction sousharmonique (surharmonique) donnée, qui peut être discontinue, M. RIESZ construit des fonctions approchées, continues avec leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Pour une telle fonction le théorème est immédiat par la formule classique de POISSON et on arrive ensuite à des fonctions plus générales par un passage à la limite. Nous verrons ici que la méthode de variation signalée ci-dessus conduit *directement* à une démonstration du théorème de M. RIESZ dans le cas où la fonction donnée est *continue*, sans aucune amélioration de cette fonction.

1. Rappelons quelques notions générales concernant le potentiel newtonien de masses distribuées dans l'espace ordinaire à trois dimensions. La distribution de masse étant donnée par une fonction additive d'ensemble μ, définie pour tout ensemble de l'espace Ω, mesurable au sens de BOREL, le potentiel newtonien

[1]) C. F. GAUSS, Allgemeine Lehrsätze, *Werke*, **5**, p. 232.

[2]) O. FROSTMAN, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.*, **3** (1935), p. 1—118, cité dans la suite comme „Thèse".

[3]) F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, *Acta Math.*, **48** (1926), p. 329—343, et **54** (1930), p. 321—360.

dû à cette distribution s'exprime par une intégrale de STIELTJES

$$\int_{\Omega} \frac{d\mu(Q)}{r_{PQ}}, \tag{1}$$

où r_{PQ} désigne la distance euclidienne des points P et Q Si la distribution μ est de signe constant et s'annule hors d'un domaine borné D, cette intégrale est égale à la limite finie ou infinie

$$\lim_{N\to\infty} \int_D \Phi_N d\mu(Q),$$

Φ_N désignant la fonction $= \dfrac{1}{r_{PQ}}$ pour $\dfrac{1}{r_{PQ}} < N$ et $= N$ pour $\dfrac{1}{r_{PQ}} \geqq N$. Si la masse est de signe variable, on écrit $\mu = \mu^+ - \mu^-$, μ^+ et μ^- étant les variations positives et négatives de μ, et le potentiel est la différence des potentiels de μ^+ et de μ^- pris séparément. Il est bien déterminé en tout point où l'un au moins de ces derniers potentiels est fini, ce qui arrive partout sauf au plus dans un ensemble de points de capacité nulle[4]). Si les masses sont réparties dans tout l'espace, le potentiel s'obtient par un passage à la limite effectué sur des intégrales étendues à des domaines D_k allant en croissant vers l'infini.

L'énergie d'une distribution de masses est donnée par l'intégrale double

$$\frac{1}{2}\iint \frac{1}{r_{PQ}} d\mu(P)\, d\mu(Q), \tag{2}$$

dont la définition est analogue à celle de l'intégrale (1). Dans le cas où les masses sont de signe variable, nous supposons pour éviter des difficultés qu'elle soit absolument convergente, c'est-à-dire que l'énergie de la distribution $\mu^+ + \mu^-$ soit finie. Sous cette seule condition on peut démontrer le fait très remarquable et évident au point de vue physique que l'intégrale d'énergie est toujours $\geqq 0$, et de plus, que le signe d'égalité n'a jamais lieu à moins que μ ne s'annule identiquement, c'est-à-dire que la fonction additive μ s'annule sur tout ensemble mesurable au sens de BOREL[5]).

2. Considérons maintenant un domaine connexe D, dont la frontière est un ensemble fermé F de capacité positive. Désignons

[4]) Thèse, p. 81.

[5]) Thèse, lemme 3, p. 28.

par $G(P, Q)$ la *fonction de Green* de ce domaine relative au pôle P, qui est un point intérieur à D. Cette fonction est le potentiel newtonien engendré par la masse unité placée au point P et une répartition négative $-\mu_P$ sur F obtenue par le balayage de la première masse sur la frontière,

$$G(P, Q) = \frac{1}{r_{PQ}} - \int_F \frac{d\mu_P(S)}{r_{QS}}.$$

Par cette formule la fonction de GREEN est définie en tout point de l'espace, et on en tire immédiatement les propriétés connues de cette fonction : l'harmonicité, la positivité, la symétrie en P et en Q etc. Elle s'annule en tout point extérieur à $D+F$, s'il en existe, et aussi en tout point de F sauf au plus dans un ensemble de points exceptionnels de capacité nulle[6]).

Désignons encore par μ une distribution de masse de signe quelconque dans le domaine D et formons le „potentiel" et „l'intégrale d'énergie" correspondants par rapport au noyau de GREEN $G(P, Q)$ de ce domaine,

(3) $$u(P) = \int_D G(P, Q)\, d\mu(Q)$$

et

(4) $$I(\mu) = \frac{1}{2} \iint_D G(P, Q)\, d\mu(P)\, d\mu(Q).$$

Si la distribution μ est positive, ces intégrales ont des valeurs bien déterminées, finies ou infinies positives. Dans le cas où μ est de signe variable, on peut leur donner un sens de la même façon que pour les intégrales (1) et (2) ci-dessus. La signification physique de l'intégrale (4) est aussi claire que celle de (2) : elle représente l'énergie de la masse électrique μ en concevant la frontière F comme un conducteur en communication avec le sol. Au point de vue physique le théorème suivant est donc évident :

Théorème I. *L'intégrale d'énergie d'une distribution* μ *dans* D

$$I(\mu) = \frac{1}{2} \iint_D G(P, Q)\, d\mu(P)\, d\mu(Q),$$

formée avec le noyau de Green et supposée absolument convergente,

[6]) Thèse, p. 74.

est toujours $\geqq 0$, *et le signe d'égalité n'a jamais lieu à moins que* μ *ne s'annule identiquement dans* D.

Pour le démontrer rigoureusement, supposons d'abord que μ s'annule identiquement au voisinage de la frontière F, c'est-à-dire que toute la masse soit répartie sur un ensemble fermé A intérieur à D. L'intégrale d'énergie étant absolument convergente par hypothèse, la variation totale de μ est nécessairement bornée et le balayage de cette masse sur F donne lieu à une distribution μ^* sur F, qui est aussi à variation bornée. Elle est déterminée par la formule

$$\mu^*(e) = \int_A \mu_P(e)\, d\mu(P),$$

où e est un sous-ensemble quelconque de F, mesurable au sens de BOREL. Remarquons encore que μ^*, dont l'intégrale d'énergie est évidemment absolument convergente, s'annule sur tout ensemble de capacité nulle. Cela étant, en formant la distribution $\mu' = \mu - \mu^*$, nous pouvons écrire

$$\int_A G(P, Q)\, d\mu(P) = \int_A \frac{d\mu(P)}{r_{PQ}} - \int_A d\mu(P) \int_F \frac{d\mu_P(S)}{r_{SQ}} =$$

$$= \int_A \frac{d\mu(P)}{r_{PQ}} - \int_F \frac{d\mu^*(S)}{r_{SQ}} = \int_{A+F} \frac{d\mu'(P)}{r_{PQ}}.$$

En intégrant encore par rapport à $\mu(Q)$ et en observant que le potentiel de la distribution μ' s'annule en tout point de F sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, on obtient

$$\iint_A G(P, Q)\, d\mu(P)\, d\mu(Q) = \int_A d\mu(Q) \int_{A+F} \frac{d\mu'(P)}{r_{PQ}} =$$

$$= \int_{A+F} d\mu'(Q) \int_{A+F} \frac{d\mu'(P)}{r_{PQ}} + \int_F d\mu^*(Q) \int_{A+F} \frac{d\mu'(P)}{r_{PQ}} = \iint_{A+F} \frac{d\mu'(P)\, d\mu'(Q)}{r_{PQ}}.$$

Or cette dernière intégrale est, comme nous l'avons déjà dit, toujours $\geqq 0$, et le signe d'égalité entraîne $\mu' \equiv 0$, c'est-à-dire que $\mu \equiv 0$ sur A. Le théorème est donc démontré dans le cas particulier signalé.

Si les masses s'étendent jusqu'à la frontière F, la variation totale de μ peut même devenir infinie sans que l'intégrale d'énergie cesse d'être absolument convergente. Or la valeur de cette intégrale est la limite d'intégrales d'énergie étendues à des ensembles A_k tendant vers D, et celles-ci sont toujours $\geqq 0$, ce qui entraîne la même inégalité à la limite. Il nous reste encore à démontrer dans le cas général que l'intégrale d'énergie $I(\mu)$ ne peut s'annuler à moins que μ ne s'annule identiquement dans D. A cet effet, écrivons d'abord l'inégalité suivante analogue à celle de SCHWARZ. Soient μ et ν deux distributions de masse dans D telles que $I(\mu)$ et $I(\nu)$ soient absolument convergentes. On aura alors

$$\Big(\iint_D G(P, Q)\, d\mu(P)\, d\nu(Q)\Big)^2 \leqq 4\, I(\mu)\, I(\nu).$$

Cela étant, si $I(\mu)$ s'annule, il en sera de même de toute intégraie formée du potentiel engendré par μ et d'une distribution quelconque ν dont l'intégrale d'énergie est absolument convergente. On en conclut facilement que μ s'annule identiquement dans D.[7])

3. Voici une application immédiate du théorème démontré. Soit $v(P)$ une fonction définie dans D qui peut être représentée par un potentiel du type (3), engendré par une masse donnée ν dans ce domaine,

$$v(P) = \int_D G(P, Q)\, d\nu(Q).$$

Nous allons voir qu'en admettant la distribution ν inconnue, on pourra l'obtenir comme la solution unique d'un problème de variation, posé en principe déjà par GAUSS et employé par l'illustre mathématicien pour résoudre le problème appelé aujourd'hui de DIRICHLET. En effet, l'intégrale d'énergie de la distribution $\mu-\nu$,

$$I(\mu-\nu) = \frac{1}{2}\iint_D G(P, Q)\, d(\mu-\nu)\, d(\mu-\nu),$$

est une fonctionnelle quadratique de la distribution variable μ qui est définie positive. Sa valeur minimum est zéro et elle est évidemment atteinte pour $\mu-\nu \equiv 0$, c'est-à-dire $\mu \equiv \nu$. Inversement, si $I(\mu-\nu) = 0$, on aura, d'après ce qu'on vient de dire, $\mu-\nu \equiv 0$, la solution ν du problème de minimum est donc unique.

La positivité de l'intégrale d'énergie étant démontrée, le résultat obtenu devient presque banal, mais la banalité disparaît tout à fait si l'on écrit la fonctionnelle sous la forme

$$I(\mu-\nu) = I(\mu) - \iint_D G(P, Q)\, d\mu(P)\, d\nu(Q) + I(\nu) =$$
$$= I(\mu) - \int_D v(P)\, d\mu(P) + I(\nu).$$

---

[7]) *Cf.* Thèse, p. 32.

Dans ce développement le dernier terme est une constante indépendante de μ, et il en résulte que la distribution ν s'obtient aussi comme la solution du problème de minimum posé pour la fonctionnelle

$$J(\mu)=I(\mu)-\int_D v(P)\,d\mu(P),$$

qui est indépendante de l'expression admise de la fonction donnée $v(P)$.

4. On sera ainsi conduit à étudier la fonctionnelle $J(\mu)$ et le problème de minimum correspondant si $f(P)$ est une fonction arbitraire donnée d'avance dans le domaine D. Nous ne nous occuperons que d'un cas particulier mais très important: celui où la fonction donnée est sousharmonique ou surharmonique. Dans ce cas, le problème de minimum aboutit à une démonstration du théorème fondamental de M. F. Riesz sur la représentation de ces fonctions par des potentiels de masses réparties dans D.[8]) On pourrait aussi caractériser le problème particulier signalé par le fait que la masse résolvante est de signe constant[9]). Pour fixer les idées, nous supposerons dans la suite que $f(P)$ est surharmonique ce qui nous permettra de considérer des potentiels de masses positives. Admettons d'abord que $f(P)$ soit continue.

Théorème II. *Soit $f(P)$ une fonction surharmonique, continue et non négative dans le domaine D, et désignons par A un ensemble fermé et borné et de capacité positive intérieur à D. Il existe alors une distribution unique μ_A de masse positive sur A telle qu'on a en tout point de A sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle*

$$f(P)=\int_A G(P,Q)\,d\mu_A(Q),$$

$G(P,Q)$ désignant la fonction de Green relative au domaine D. L'ensemble exceptionnel ne contient aucun point intérieur de A.

Conformément aux indications précédentes nous aurons à minimiser la fonctionnelle

$$J(\mu)=\frac{1}{2}\iint_A G(P,Q)\,d\mu(P)\,d\mu(Q)-\int_A f(P)\,d\mu(P),$$

[8]) F. Riesz, *loc. cit.*, en particulier *Acta Math.*, **54**, p. 357.

[9]) *Cf.* plus loin p. 157, note [13]).

mais en nous restreignant à des distributions de masses positives sur A. Pour toutes les distributions possibles de cette espèce la fonctionnelle $J(\mu)$ a une borne inférieure λ, qui est nécessairement $\leqq 0$ puisque $J = 0$ pour $\mu \equiv 0$, et il existe une suite minimisante $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ de distributions telles que $\lim\limits_{n\to\infty} J(\mu_n) = \lambda$. Je dis que les fonctions d'ensemble μ_n sont également bornées à partir d'un certain indice. En effet, si la masse totale m de μ tend vers l'infini, le premier terme de $J(\mu)$ tend vers l'infini plus vite que cm^2, où c est le minimum (certainement positif) de l'intégrale d'énergie (4) pour $m = 1$, tandis que le second terme est $O(m)$. La borne inférieure de la fonctionnelle ne peut donc pas être atteinte par des masses tendant vers l'infini. Cela étant, on peut de la suite minimisante $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ extraire une suite partielle $\mu_{n_1}, \mu_{n_2}, \ldots, \mu_{n_k}, \ldots$ qui dans un certain sens[10]) converge vers une distribution limite μ_A, de manière que l'on ait pour toute fonction continue $f(P)$

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f(P)\, d\mu_{n_k}(P) = \int_A f(P)\, d\mu_A(P).$$

On démontre encore facilement que l'intégrale d'énergie (4) est une fonctionnelle semicontinue inférieurement de μ[11]), c'est-à-dire que

$$\lim_{k\to\infty} I(\mu_{n_k}) \geqq I(\mu_A),$$

ce qui donne immédiatement

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} J(\mu_{n_k}) \geqq J(\mu_A) \geqq \lambda.$$

La distribution μ_A fournit par conséquent un vrai minimum de la fonctionnelle $J(\mu)$.

Ce point établi, désignons par σ une distribution de masse de signe quelconque sur A, telle que 1. l'intégrale d'énergie $I(\sigma)$ soit absolument convergente, 2. la distribution $\mu_A + \sigma$ soit partout non-négative. Nous dirons que σ est une *variation permise* de la distribution μ_A. La distribution $\varepsilon\sigma$, où ε est un nombre positif très petit, est évidemment une variation permise en même temps que σ. Pour toute variation de cette espèce la valeur de la fonc-

---

[10]) F. Riesz, Mémoire cité, *Acta. Math.*, **54**, p. 351. — C. de la Vallée Poussin, Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, *Annales de l'Institut H. Poincaré*, **2** (1932), p. 169—232, spec. Note I, p. 223. — Thèse, p. 10.

[11]) Thèse, p. 22.

tionnelle $J(\mu)$ ne peut être diminuée, et on aura par conséquent

$$0 \leqq J(\mu_A + \varepsilon\sigma) - J(\mu_A) = \varepsilon \int_A \left\{ \int_A G(P, Q)\, d\mu_A(Q) - f(P) \right\} d\sigma(P) + $$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \iint_A G(P, Q)\, d\sigma(P)\, d\sigma(Q).$$

Considérons maintenant un sous-ensemble arbitraire de A de capacité positive. Sur cet ensemble on peut toujours répartir une masse positive de manière que son intégrale d'énergie soit finie, ou, ce qui revient au même, il existe toujours des variations permises σ qui sont positives sur un ensemble arbitraire de capacité positive et qui s'annulent en dehors de celui-ci. D'où on conclut immédiatement que la différence

$$\varphi(P) = \int_A G(P, Q)\, d\mu_A(Q) - f(P)$$

est $\geqq 0$ en tout point de A sauf peut-être dans un ensemble de capacité nulle. En réalité, il n'y a pas de points d'exception dans un ensemble ouvert quelconque faisant partie de A, car le premier terme de $\varphi(P)$ est une fonction surharmonique de P, donc en tout point $\geqq$ la valeur moyenne dans un entourage sphérique quelconque, et le second terme est continu par hypothèse.

En désignant par N le noyau de masse relatif à μ_A, c'est-à-dire le sous-ensemble fermé le plus petit de A portant toute la masse μ_A, on voit d'une manière analogue que $\varphi(P) \leqq 0$ en tout point de N. En effet, si la fonction $\varphi(P)$, qui est semicontinue inférieurement dans D, était >0 en un point de N, elle serait encore >0 dans un entourage O de ce point. En supprimant la masse $\varepsilon\mu_A(O) \neq 0$ située dans cet entourage on aurait une variation négative de la fonctionnelle, en contradiction avec la propriété minimum de $J(\mu_A)$.

L'inégalité double ainsi établie nous donne d'abord que la différence $\varphi(P)$ s'annule en tout point du noyau N, sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle où elle peut être <0. Or cette fonction, étant la différence d'un potentiel dû a des masses situées sur N et d'une fonction surharmonique dans tout le domaine D, est une fonction sousharmonique dans le domaine partiel $D-N$ et satisfait ici par conséquent au *principe du maximum*. Admettons un moment que la frontière F de D ne contienne que des points *réguliers,* c'est-à-dire que la fonction de GREEN s'annule en tout point de F. Alors, pour P tendant vers la frontière de D, le potentiel dû à la distribution μ_A s'annule d'une manière continue avec $G(P, Q)$, tandis que $f(P)$ est non-négative par hypothèse; la plus grande des limites de $\varphi(P)$ est donc $\leqq 0$. Il en est de même pour P tendant vers N, $\varphi(P)$ étant $\leqq 0$ en tout point de cet ensemble[12]). Par conséquent, $\varphi(P)$ est $\leqq 0$ en tout point de $D-N$, et alors en tout point de D. L'inégalité opposée étant valable, comme on vient de voir, en tout point de A sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, on conclut que $\varphi(P)=0$ en tout point de cet ensemble avec ladite exception. En particulier, $\varphi(P)=0$ en tout point intérieur de A. On aura donc la formule

$$f(P)=\int_A G(P, Q)\, d\mu_A(Q).$$

Il ne nous reste dans ce cas particulier qu'à démontrer que cette représentation de $f(P)$ est unique. Or cela est évident d'après le théorème I, car, si ν est une seconde distribution sur A dont le potentiel est $=f(P)$ à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle, on aura $I(\mu_A-\nu)=0$. D'où il vient $\nu \equiv \mu_A$.[13])

Dans le cas où la frontière F de D contient des points irréguliers, c'est-à-dire des point où $G(P, Q)>0$, il faut compléter la démonstration ci-dessus par un principe du maximum plus général. Voici cette généralisation, qui se rattache étroitement au principe de PHRAGMÉN—LINDELÖF[14]).

[12]) Cela est en effet une conséquence immédiate du théorème suivant: *Soit u le potentiel d'une distribution positive sur N, et désignons par S et T deux points variables, l'un dans N l'autre dans $D-N$, tendant tous les deux vers un point frontière Q de N. On a alors l'inégalité*

$$\overline{\lim_{T\to Q}}\, u(T) \leqq \overline{\lim_{S\to Q}}\, u(S).$$

Voir A. J. MARIA, The Potential of a Positive Mass and the Weight Function of Wiener, *Proceedings of the National Academy of Sciences U. S. A.*, **20** (1934), p. 485—489. — Thèse, p. 69.

[13]) On conclut d'une manière analogue que $J(\mu_A)=\lambda$ est le minimum de $J(\mu)$ même si l'on permet des distributions de signe variable donnant des intégrales absolument convergentes. En écrivant une telle distribution $\mu=\mu_A+\mu'$, on aura en effet

$$J(\mu)=J(\mu_A+\mu')=J(\mu_A)+I(\mu')\geqq J(\mu_A).$$

[14]) E. PHRAGMÉN et E. LINDELÖF, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, *Acta Math.,* **31** (1908), p. 381—406.

Soit $u(P)$ une fonction sousharmonique définie dans un domaine borné D. Si $u(P)$ est bornée supérieurement dans ce domaine et si $\overline{\lim}\, u(P)$ pour P tendant vers la frontière est $\leqq M$ à l'exception au plus d'un ensemble de points frontières de capacité nulle, on a $u(P) \leqq M$ en tout point de D.[15])

En effet, soit ε un nombre positif si petit que l'on veut, l'ensemble des points frontières où $\overline{\lim}\, u(P) \geqq M + \varepsilon$ est *fermé* et, par hypothèse, de capacité nulle. Appelons cet ensemble E_ε et l'enfermons par un nombre fini de surfaces régulières S de manière que le problème d'équilibre puisse être résolu pour les domaines fermés limités par S. C'est-à-dire qu'on peut répartir une masse positive sur S de façon que son potentiel newtonien $v(P)$ soit $= 1$ en tout point de S et en tout point intérieur à S. Cela étant, si K est une borne supérieure de $u(P)$ dans D, la fonction *surharmonique* $M + \varepsilon + K v(P)$ est une majorante de $u(P)$ au voisinage de la frontière F de D. C'est-à-dire que la plus grande des limites de la fonction *sousharmonique* $u(P) - M - \varepsilon - K v(P)$ est toujours $\leqq 0$. On a alors, par le principe du maximum ordinaire,

$$u(P) \leqq M + \varepsilon + K v(P)$$

en tout point de D. Le point P étant fixé, cette inégalité est valide quelle que soit la surface S. En rétrécissant cette surface vers l'ensemble E_ε, $v(P)$ tend vers zéro puisque la capacité de E_ε est nulle, et il vient par conséquent

$$u(P) \leqq M + \varepsilon.$$

Donc,

$$u(P) \leqq M.$$

En appliquant ce théorème à la différence $\varphi(P)$ obtenue par la variation de la fonctionnelle $J(\mu)$, on conclut comme plus haut que cette fonction est $\leqq 0$ en tout point de D. Bien entendu, si D est un domaine infini, il faut d'abord exclure les points très éloignés, mais cela est possible puisque $G(P, Q)$ s'annule à l'infini.

5. Le théorème II peut être généralisé dans des directions diverses. On peut d'abord s'affranchir de l'hypothèse de la con-

---

[15]) Au sujet de ce théorème, voir F. Vasilesco, Sur la méthode du balayage de Poincaré, son extension par M. de la Vallée Poussin, et le problème de Dirichlet généralisé, *Journal de Math.*, **14** (1935), p. 209—227, spec. n^{os} 5 et 7, pp. 217 et 218; R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen* (Berlin, 1936), p. 134. — La démonstration que nous donnerons ici est en substance due à M. Vasilesco.

tinuité en la remplaçant par la condition que $f(P)$ soit semicontinue inférieurement et non identiquement infinie. En effet, on peut approcher la fonction donnée par une suite croissante de fonctions continues et surharmoniques, et pour chacune de celles-ci la formule établie est valable. On voit ensuite par un passage à la limite facile à effectuer qu'elle est encore valable pour la fonction limite de la suite[16]).

De plus, en faisant tendre le domaine D' vers D, on obtient une représentation de $f(P)$ dans tout le domaine D. Nous avons en outre supposé que $f(P)$ soit non-négative. Cette hypothèse, faite jusqu'ici pour faciliter l'exposé, peut être remplacée par celle de l'existence d'une fonction harmonique $\leqq f(P)$ dans D. Nous nous contenons d'énoncer les résultats, déjà bien-connus par les Mémoires souvent cités de M. RIESZ.

Théorème III. *Soit $f(P)$ une fonction surharmonique dans le domaine D et supposons qu'il existe une fonction harmonique $\leqq f(P)$ dans tout ce domaine. Il existe alors une minorante harmonique qui est la plus grande, $H(P)$, et l'on a*

$$f(P) = \int_D G(P, Q)\, d\mu_D(Q) + H(P),$$

la distribution μ_D sur D étant unique.

(Reçu le 8 novembre 1936)

---

16) F RIESZ, *Acta Math.*, **54**, p. 348—349. — *Cf.* aussi G. EVANS, On potentials of positive mass I., *Transactions American Math. Society*, **37** (1935), p. 226—253, spec. p. 231.

Über den Zusammenhang zweier Sätze der Funktionentheorie.

Von STEPHAN LIPKA in Szeged.

Es sei $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine nicht konstante Potenzreihe, welche einen endlichen positiven Konvergenzradius besitzt. Jeder Randpunkt des Konvergenzkreises ist nach einem Satz von JENTZSCH eine Häufungsstelle der Nullstellen der Abschnitte

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Liegt nun im Innern des Konvergenzkreises eine Nullstelle von $f(x)$, so ist diese Stelle auch eine Häufungsstelle der Nullstellen der Abschnitte $f_n(x)$ (laut eines Hurwitzschen Satzes). Wir werden den Zusammenhang dieser zwei Sätze untersuchen. Es sei ξ ein Randpunkt des Konvergenzkreises, in dem die Funktion $f(x)$ regulär ist. Wir wollen diesen Punkt ξ charakterisieren, wenn er eine Nullstelle von $f(x)$ ist. Da ξ auf dem Rande liegt, so ist er nach dem Satz von JENTZSCH stets eine Häufungsstelle der Nullstellen der Abschnitte $f_n(x)$, ob ξ eine Nullstelle von $f(x)$ ist oder nicht. Der Unterschied verwischt sich also scheinbar zwischen den Sätzen von HURWITZ und JENTZSCH, wenn die Nullstelle von $f(x)$ auf dem Rande des Konvergenzkreises liegt. Den fraglichen Zusammenhang zwischen diesen Sätzen drückt aus der folgende

Satz I. *Es habe* $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *den Konvergenzradius* 1. $f(x)$ *sei im Punkte* $x=1$ *regulär und* $f(1)=0$. *Wir betrachten um den Punkt* 1 *einen Kreis* $\varkappa$ *mit beliebigem Radius* δ $(\delta>0)$. *Dann* *hat jeder Abschnitt* $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *eine Nullstelle in dem Kreise* $\varkappa$, *wenn nur* $n > N(\delta)$ *gilt (wobei* $N(\delta)$ *eine geeignete positive Zahl bedeutet).*

Dieser Satz ist eine einfache Folgerung eines Ostrowskischen Satzes[1]), welcher sich auf die sogenannte „Überkonvergenz" einer Folge von analytischen Funktionen bezieht. Es bezeichne $\{f_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ eine beliebige Teilfolge der Abschittsfolge $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Nach dem Satz von OSTROWSKI ist jeder im Endlichen liegende Randpunkt desjenigen mit dem Einheitskreis zusammenhängenden vollständigen Gebietes, in welchem die Abschnittsfolge $f_{n_k}(x)$ gleichmäßig konvergiert, eine nichtisolierte Häufungsstelle der Nullstellen der Abschnitte $f_{n_k}(x)$, oder ein singulärer Punkt von $f(x)$.

Wir beweisen den Satz I auf indirektem Wege. Wenn der Satz unrichtig wäre, so existierte eine Teilfolge $\{f_{n_k}(x)\}$ der Abschnittsfolge $\{f_n(x)\}$ mit der Eigenschaft, daß kein $f_{n_k}(x)$ eine Nullstelle in dem Kreise $\varkappa$ besitzt. Man kann voraussetzen, daß die Funktion $f(x)$ in dem Kreise $\varkappa$ regulär und bis auf die Stelle $x = 1$ von Null verschieden ist. Wir betrachten um den Punkt 1 den abgeschlossenen Kreis $\varkappa'$ mit dem Radius $\delta/2$ und behaupten, daß er in dem vollständigen Gebiet G der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{f_{n_k}(x)\}$ liegt. Aus dem Ostrowskischen Satze folgt nämlich, daß kein Punkt des Kreises $\varkappa'$ ein Grenzpunkt des Gebietes G sein kann, weil erstens in $\varkappa'$ kein singulärer Punkt von $f(x)$ liegt und zweitens, da $\varkappa'$ im Innern von $\varkappa$ liegt, kein Punkt von $\varkappa'$ eine Häufungsstelle der Nullstellen von $f_{n_k}(x)$ ist. Aber auch kein Punkt von $\varkappa'$ im Äußeren des Gebietes G liegen kann, da sonst die Verbindungsstrecke dieses Punktes mit einem im Innern des Einheitskreises liegenden Punkte von $\varkappa'$ einen Grenzpunkt von G enthalten würde. Also liegt der Kreis $\varkappa'$ ganz im Innern von G, folglich konvergiert die Folge $\{f_{n_k}(x)\}$ in dem abgeschlossenen Kreise $\varkappa'$ gleichmäßig. Da $f(x)$ in $\varkappa$ von Null verschieden ist, wenn $x \neq 1$, so gilt auf dem Rande von $\varkappa'$

$$|f(x)| > \varepsilon > 0.$$

---

[1]) A. OSTROWSKI, Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen, *Hamburger Abhandlungen*, 1 (1922), S. 327—350.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{f_{n_k}(x)\}$ auf der Kreisfläche $\varkappa'$ ist, bei passender Wahl eines N, für $n_k > N$

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wenn x zu $\varkappa'$ gehört, also auf dem Rande von $\varkappa'$

$$|f_{n_k}(x)| > \frac{\varepsilon}{2},$$

im Mittelpunkt von $\varkappa'$ aber

$$|f_{n_k}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also erreicht $|f_{n_k}(x)|$ ein Minimum im Inneren von $\varkappa'$, d. h. $f_{n_k}(x)$ hat eine Wurzel in $\varkappa'$. Dies widerspricht aber der Annahme, daß kein $f_{n_k}(x)$ eine Nullstelle in dem Kreis $\varkappa$ besitzt.

Man sieht leicht ein, daß Satz I — der eine Ausdehnung des Hurwitzschen Satzes ist für den Fall, wo die Nullstelle der Funktion $f(x)$ auf dem Rande des Konvergenzkreises liegt — nicht umkehrbar ist, wie dies der Beispiel $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ zeigt.

Die schärfere Fassung des Hurwitzschen Satzes lautet wie folgt: Es sei ξ, $|\xi| < 1$, eine k-fache Nullstelle von $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so haben in jedem hinreichend kleinen Kreise um ξ unendlich viele Abschnitte $f_n(x)$ (sogar alle von einer Stelle an) k Wurzeln, wenn mehrfache Wurzeln immer mehrfach gezählt werden. Diese schärfere Fassung des Hurwitzschen Satzes gilt nicht mehr, wenn die Nullstelle von $f(x)$ auf dem Rande des Konvergenzkreises liegt. Es sei z. B. $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$. $f(x)$ ist in dem Punkte $x = 1$ regulär und $f(1) = 0$. (1 ist eine einfache Nullstelle von $f(x)$.) Da

$$f_{4n+3}(x) = \frac{1-x}{1+x^2}\left(1 - x^{4(n+1)}\right)$$

gilt, haben die Abschnitte $f_{4n+3}(x)$ beliebig viele Nullstellen in jedem beliebig kleinen Kreise um 1, wenn nur n genügend groß ist. Also ist in diesem Falle der schärfere Hurwitzsche Satz nicht mehr gültig. Es gilt aber die folgende schwächere Fassung:

Satz II. *$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ sei in dem Punkte $x = 1$ regulär* *und sei* 1 *eine k-fache Nullstelle von* $f(x)$. *Dann liegen in jedem beliebig kleinen Kreise um* 1 *mindestens k Wurzeln des Abschnittes* $f_n(x)$, *wenn nur n genügend groß ist.*

B e w e i s. Es bezeichne $\varkappa$ einen beliebig kleinen Kreis um 1 mit dem Radius δ. Wenn der Satz unrichtig wäre, so existierte eine Teilfolge $\{f_{n_k}(x)\}$ der Abschnittsfolge $\{f_n(x)\}$ mit der Eigenschaft, daß jeder $f_{n_k}(x)$ höchtens $k-1$ Nullstellen in dem Kreise $\varkappa$ besitzt. Dann können wir aus dieser Teilfolge eine weitere Teilfolge $\{f_{r_k}(x)\}$ derart auswählen, daß jeder $f_{r_k}(x)$ genau gleichviele und zwar l Nullstellen in dem Kreise $\varkappa$ besitzt, wo

$$1 \leqq l \leqq k-1$$

gilt. (Nach dem Satz I hat ja jeder $f_{r_k}(x)$ mindestens eine Nullstelle in $\varkappa$.) Dann können wir aus der Teilfolge $\{f_{r_k}(x)\}$ wieder eine andere Teilfolge $\{f_{s_k}(x)\}$ auswählen derart, daß die in $\varkappa$ liegenden Wurzeln der Abschnitte $f_{s_k}(x)$ sich zu l Häufungsstellen nähern. Diese Häufungsstellen sind nicht notwendig verschieden; sie liegen in dem abgeschlossenen Kreise $\varkappa$ und außer diesen Häufungsstellen haben die Wurzeln der Abschnitte $f_{s_k}(x)$ keine andere Häufungsstelle im Innern von $\varkappa$. Wir nehmen statt $\varkappa$ den Kreis $\varkappa'$ mit dem Radius $\delta/2$ um den Punkt 1. Da der Kreis $\varkappa'$ nur isolierte Häufungsstellen der Wurzeln der Abschnitte $f_{s_k}(x)$ enthält, so folgt aus dem Ostrowskischen Satze, daß $\varkappa'$ in dem vollständigen Gebiet gleichmäßiger Konvergenz der Folge $f_{s_k}(x)$ liegt (ganz so wie bei dem Beweis des Satzes I). Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $f_{s_k}(x)$ auf der Kreisfläche $\varkappa'$ ist bei passender Wahl eines N für $k > N$ auf dem Rande von $\varkappa'$

$$|f_{s_k}(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{1}$$

wo ε eine vorgegebene positive Zahl bedeutet, für welche auf dem Rande von $\varkappa'$

$$|f(x)| > \varepsilon \tag{2}$$

gilt. Aus (1) und (2) folgt, daß $f(x)$ und $f_{s_k}(x)$ gleichviele Wurzeln in $\varkappa'$ haben. $f_{s_k}(x)$ hat also k Wurzeln in $\varkappa'$. Dies ist aber ein Widerspruch, weil $f_{s_k}(x)$ höchstens l Wurzeln in $\varkappa'$ besitzt und $l < k$ ist.

Es sei ξ eine Nullstelle von $f(x)$ auf dem Rande des Konvergenzkreises ($|\xi| = 1$). Wir haben die Wurzeln der Abschnitte $f_n(x)$ bisher in einem Kreise $\varkappa$ um ξ betrachtet. Wir werden uns im Folgenden nur auf einen Teil des Kreises $\varkappa$ beschränken und nennen den mit $\varkappa$ gemeinsamen Teil des abgeschlossenen Einheitskreises schlechthin „τ-Umgebung“.

Satz III. *Es habe* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *den Konvergenzradius* 1 *und die Koeffizienten von* $f(x)$ *sollen der Bedingung*

$$a_n \to 0$$

genügen. $f(x)$ *sei im Punkte* $x=1$ *regulär und der Punkt* 1 *sei eine Häufungsstelle der Abschnittswurzeln, zu dem sich die Abschnittswurzeln aus dem Innern des Einheitskreises nähern, also mit der eben eingeführten Ausdrucksweise jede beliebig kleine* τ*-Umgebung des Punktes* 1 *soll Abschnittswurzeln enthalten. Dann ist* 1 *eine Nullstelle von* $f(x)$.

Beweis. Wir werden den folgenden Satz von M. Riesz[2]) benützen. Es sei $x_1 \ldots x_2$ (d. h. $\operatorname{arc} x_1 \leqq \operatorname{arc} x \leqq \operatorname{arc} x_2$) ein Regularitätsbogen, welcher den Punkt 1 im Innern enthält. Man kann also $R > 1$ so wählen, daß die für $|x| < 1$ durch die Potenzreihe dargestellte Funktion $f(x)$ im ganzen Sektor (einschließlich Rand) $0 \leqq |x| \leqq R$, $\operatorname{arc} x_1 \leqq \operatorname{arc} x \leqq \operatorname{arc} x_2$ regulär ist. Dann ist auf dem Rande des Sektors gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{x^{n+1}} (f(x) - f_n(x))(x - x_1)(x - x_2) = 0, \tag{3}$$

wenn $a_n \to 0$ gilt.

Wir betrachten jetzt eine τ-Umgebung von 1, welche im Innern des genannten Sektors liegt. Da der absolute Betrag der Funktion auf der linken Seite von (3) im Innern des Sektors nicht größer als das Maximum auf dem Rande ist, so gilt alsdann auf dem Rande der τ-Umgebung gleichmäßig die Gleichung (3). Auf dem Rande von τ ist $|x^{n+1}| \leqq 1$ und $|(x-x_1)(x-x_2)| > \eta > 0$, also, wenn n genügend groß ist, gilt auf dem Rande von τ nach (3) die Ungleichung

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{4}$$

wo ε eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl bedeutet. Wenn nun der Satz III unrichtig wäre, so würde $f(1)$ von Null

---

[2]) M. Riesz, Neuer Beweis des Fatouschen Satzes, *Göttinger Nachrichten,* 1916, S. 62—65.

verschieden sein, es gebe also eine positive Zahl ε, für welche auf dem Rande von τ

$$|f(x)| > \varepsilon. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt aber, daß die Funktionen $f(x)$ und $f_n(x)$ in τ gleichviele Nullstellen haben, d. h. $f_n(x)$ hat keine Nullstelle in τ. Dies widerspricht aber der Voraussetzung des Satzes III.

(Eingegangen am 5. Oktober 1936.)

Über die Gesamtheit der charakteristischen Funktionen im Hilbertschen Funktionenraum.

Von BÉLA V. SZ. NAGY in Szeged.

Einleitung.

Bedeute $\mathfrak{M}$ ein endliches oder unendliches Intervall auf der x-Achse. Die monoton wachsende Funktion $\alpha(x)$ erzeuge auf $\mathfrak{M}$ einen Lebesgue—Stieltjesschen Maß- und Integralbegriff.

Wir betrachten den Hilbertschen Funktionenraum $\mathfrak{L}_2$ aller solchen auf $\mathfrak{M}$ definierten Funktionen $f(x)$, welche in Bezug auf diesen Maßbegriff meßbar sind und für welche

$$\int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^2 \, d\alpha(x)$$

endlich ist. Die Dimension von $\mathfrak{L}_2$ kann endlich oder abzählbar unendlich sein. Es ist wohlbekannt, daß der abstrakte gleichvieldimensionale Hilbertsche Raum $\mathfrak{H}$ eineindeutig, linear und isometrisch auf $\mathfrak{L}_2$ abbildbar ist. Unter der Isometrie dieser Abbildung versteht man bekanntlich Folgendes: Sind φ_1 und φ_2 irgend zwei Elemente von $\mathfrak{H}$ und sind $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ die ihr entsprechenden Funktionen in $\mathfrak{L}_2$, so gilt

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} \, d\alpha(x).$$

Diese Abbildung $\varphi \rightarrow \varphi(x)$ nennt man auch eine Verwirklichung des abstrakten Hilbertschen Raumes durch den mehr konkreten Funktionenraum $\mathfrak{L}_2$.

Ist $\mathfrak{m}$ eine (im zugrunde gelegten Lebesgue – Stieltjesschen Sinne) meßbare Teilmenge[1]) von $\mathfrak{M}$, so gehört die charakteristi-

[1]) Unter einer meßbaren Menge werden wir nur eine solche verstehen, die ein endliches Maß hat.

sche Funktion von $\mathfrak{m}$, d. h. die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathfrak{m} \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathfrak{M} - \mathfrak{m} \end{cases}$$

zu $\mathfrak{L}_2$.

Es kann nun die folgende Frage aufgeworfen werden:

Welche notwendigen und hinreichenden inneren Eigenschaften muß eine gegebene Teilmenge $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{H}$ besitzen, damit $\mathfrak{H}$ derart durch ein $\mathfrak{L}_2$ verwirklicht werden kann, daß $\mathfrak{h}$ bei dieser Verwirklichung gerade in die Gesamtheit der charakteristischen Funktionen aus $\mathfrak{L}_2$ übergehe.

Bevor wir eine Antwort auf diese Frage geben, führen wir eine nützliche Bezeichnung ein. Gilt für beliebige zwei Elemente φ_1 und φ_2 aus $\mathfrak{H}$ die Gleichung $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \varphi_1) = |\varphi_1|^2$, so schreiben wir

$$\varphi_1 \prec \varphi_2.$$

Es gilt also immer $\varphi \prec \varphi$. Haben die Beziehungen $\varphi_1 \prec \varphi_2$ und $\varphi_2 \prec \varphi_1$ gleichzeitig statt, so folgt leicht, daß φ_1 gleich φ_2 ist.

§ 1. Die Bedingungen und ihre Notwendigkeit.

Sei $\mathfrak{h}$ eine gegebene Teilmenge des endlich- oder abzählbar unendlichviel-dimensionalen abstrakten Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$. Das allgemeine Element von $\mathfrak{H}$ werden wir mit φ, die Elemente von $\mathfrak{h}$ aber mit kleinen lateinischen Buchstaben (f, g, h usw. und Indizes) bezeichnen. Damit es eine solche Verwirklichung von $\mathfrak{H}$ durch ein $\mathfrak{L}_2$ gebe, welche $\mathfrak{h}$ gerade in die Gesamtheit der in $\mathfrak{L}_2$ enthaltenen charakteristischen Funktionen überführt, ist notwendig und hinreichend, daß für $\mathfrak{h}$ die folgenden Bedingungen erfüllt seien:

I. *$\mathfrak{h}$ spannt $\mathfrak{H}$ auf, d. h. es liegen die Linearausdrücke der Elemente f von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{H}$ überall dicht;*

II. *Der Unterschied $f-g$ ist dann und nur dann in $\mathfrak{h}$ enthalten, wenn $g \prec f$ gilt;*

III. *Es gibt zu jedem Elementenpaar f, g ein solches Elementenpaar h, k, für welches $f+g = h+k$ und $h \prec f$, $h \prec g$;*

IV. *$\mathfrak{h}$ ist abgeschlossen im Sinne, daß der Limes jeder konvergenten „monotonen" Folge f_n ($f_n \prec f_{n+1}$) zu $\mathfrak{h}$ gehört.*

Beweis der Notwendigkeit. Nehmen wir nun an, daß $\mathfrak{h}$ bei einer Verwirklichung von $\mathfrak{H}$ durch ein $\mathfrak{L}_2$ in die Gesamtheit der charakteristischen Funktionen übergeht. Da die charakteristischen Funktionen offenbar $\mathfrak{L}_2$ aufspannen, muß auch I gültig sein.

Es sei nun $f \prec g$ und es seien $f(x)$ und $g(x)$ diejenigen charakteristischen Funktionen, in welche f und g übergehen. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{M}} f(x)\overline{g(x)}\,d\alpha(x) = (f, g) = \|f\|^2 = \int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^2\,d\alpha(x),$$

also

$$\int_{\mathfrak{M}} f(x)\,g(x)\,d\alpha(x) = \int_{\mathfrak{M}} f(x)\,d\alpha(x).$$

Es muß also

$$f(x)\,(1 - g(x)) = 0$$

gelten, woraus $f(x) \leqq g(x)$ folgt. Ist umgekehrt eine charakteristische Funktion $g(x)$ größer als eine andere, $f(x)$, und sind g bzw. f ihre Entsprechenden, so muß offenbar $f \prec g$ gelten.

Die Notwendigkeit von II folgt also daraus, daß $g(x) - f(x)$ dann und nur dann eine charakteristische Funktion ist, wenn $f(x) \leqq g(x)$ gilt. Es gehören ferner mit irgend zwei charakteristischen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ auch $\inf\{f(x), g(x)\} = h(x)$ und $\sup\{f(x), g(x)\} = k(x)$ zu der Gesamtheit der charakteristischen Funktionen und es gilt $f(x) + g(x) = h(x) + k(x)$. Es muß also auch III notwendig gelten.

Ist endlich die monoton wachsende Folge $f_n(x)$ von charakteristischen Funktionen im Quadratintegral-Mittel konvergent, so ist ihr Limes offenbar auch eine charakteristische Funktion, woraus auch die Notwendigkeit von IV folgt.

§ 2. Einige Folgerungen aus den Bedingungen I—IV.

Wir setzen im Folgenden voraus, daß für eine Untermenge $\mathfrak{h}$ des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ die Bedingungen I—IV erfüllt sind. Die Aufgabe dieses Paragraphen ist einige Folgerungen dieser Bedingungen zusammenzustellen.

1. *Gehört mit zwei Elementen, f und g, auch die Summe $f + g$ zu $\mathfrak{h}$, so ist $f \prec f + g$ und es gilt $f \perp g$ (d. h.: $(f, g) = 0$).*

Dies ist eine unmittelbare Folgerung von II und der Definition des $\prec$-Zeichens.

2. *Sei h das durch die Bedingung* III *dem Elementenpaar f, g zugeordnete Element, das wir kurz auch mit $f.g$ bezeichnen werden. Es gilt dann*

$$0 \leqq |h|^2 = |f \,.\, g|^2 = (f, g).$$

Da nämlich f und wegen II auch $g - f \,.\, g$ zu $\mathfrak{h}$ gehören und da ferner wegen III auch $f + (g - f \,.\, g)$ zu $\mathfrak{h}$ gehört, so muß nach 1 gelten: $f \perp g - f \,.\, g$, also $(f, g) = (f, f \,.\, g)$, woraus wegen $f \,.\, g \prec f$ die Behauptung folgt.

3. *Ist $f \prec g$ und $g \prec h$, so ist auch $f \prec h$.*

Beweis. Es gilt einerseits

$$(f, h) - |f|^2 = (f, h - f) = (f, h - g) + (f, g - f) \geqq 0$$

(da $h - g$ und $g - f$ wegen II zu $\mathfrak{h}$ gehören und da das innere Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{h}$ nach 2 stets $\geqq 0$ ist). Andrerseits gilt ebenfalls auf Grund von 2

$$|f|^2 - (f, h) = |f|^2 - |f \,.\, h|^2 = |f|^2 - (f, f \,.\, h) = (f, f - f \,.\, h) \geqq 0$$

(da f und $f - f \,.\, h$ zu $\mathfrak{h}$ gehören). Aus den beiden gewonnenen Ungleichungen folgt tatsächlich

$$|f|^2 = (f, h), \text{ w. z. b. w.}$$

4. *Das zu den Elementen f und g gehörige „Produktelement" $f \,.\, g$ (siehe 2) hat noch die folgende Eigenschaft. Gilt für ein beliebiges h gleichzeitig $h \prec f$ und $h \prec g$, so gilt auch $h \prec f \,.\, g$. Aus dieser Eigenschaft und aus den durch Bedingung* III *erforderten Beziehungen: $f \,.\, g \prec f$ und $f \,.\, g \prec g$ folgt auch, daß $f \,.\, g$ eindeutig durch die beiden Elemente f und g (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) bestimmt ist.*

Beweis. Sei[2]) $h_1 = h - h \,.\, (f \,.\, g)$ und $h_2 = f \,.\, g + h_1$; infolge der Bedingungen II—III gehören ja diese zu $\mathfrak{h}$.

Aus $h \prec f$, $h \prec g$ folgt, daß auch $h_1 \prec f$, $h_1 \prec g$ gilt. Es folgt nämlich aus $h = h_1 + h \,.\, (f \,.\, g)$ und aus 1, daß $h_1 \prec h$ ist. Infolge 3 ergibt sich dann auch die Richtigkeit von $h_1 \prec f$ und von $h_1 \prec g$.

Aus $h_2 = f \,.\, g + h_1$ folgt nach 1 die Beziehung $f \,.\, g \perp h_1$. Es gilt daher

$$(h_2, f) = (f \,.\, g, f) + (h_1, f) = |f \,.\, g|^2 + |h_1|^2 = |f \,.\, g + h_1|^2 = |h_2|^2,$$

woraus sich $h_2 \prec f$ ergibt. Ebenso läßt sich auch die Beziehung $h_2 \prec g$ rechtfertigen.

Aus 2 gewinnen wir aber

$$-|h_1|^2 = |f \,.\, g|^2 - |h_2|^2 = (f, g) - (f, h_2) = (f, g - h_2) \geqq 0.$$

[2]) Da die eindeutige Bestimmtheit der „Produktelemente" noch nicht sichergestellt ist, legen wir in diesem Beweis eine beliebige (aber durchwegs dieselbe) Erklärung von $f \,.\, g$ und $h \,.\, (f \,.\, g)$ von den etwa möglichen mehreren zugrunde.

Es muß also $h_1 = h - h.(f.g)$ gleich Null sein. Also gilt tatsächlich $h = h.(f.g) \prec f.g$, w. z. b. w.

Wäre nun $f.g$ nicht eindeutig definiert, d. h. könnte es gleich k_1, aber auch gleich k_2 sein, so müßte nach den soeben Bewiesenen gleichzeitig $k_1 \prec k_2$ und $k_2 \prec k_1$ gelten, was nur für $k_1 = k_2$ möglich ist.

5 *Ist $f \prec g$, so gilt $f.g = f$.*

Dies ist eine leichte Folgerung aus 4.

6. *Es gilt immer $f.(g.h) = (f.g).h$.*

Beweis. Es folgt aus $f.(g.h) \prec g.h$ und $g.h \prec g$, $g.h \prec h$ wegen 3: $f.(g.h) \prec g$ und $f.(g.h) \prec h$. Da auch

$$f.(g.h) \prec f$$

gilt, so muß nach 4 auch $f.(g.h) \prec f.g$, $f.(g.h) \prec h$ und daher auch $f.(g.h) \prec (f.g).h$ richtig sein. Ebenso ließe sich offenbar auch die Beziehung $(f.g).h \prec f.(g.h)$ beweisen; es gilt also notwendig $f.(g.h) = (f.g).h$.

7. *Ist $f_1 \perp g_1$ und $f_2 \prec f_1$, $g_2 \prec g_1$, so gilt auch $f_2 \perp g_2$.*

Beweis. Aus $f_2.g_2 \prec f_2 \prec f_1$ und $f_2.g_2 \prec g_2 \prec g_1$ folgt wegen 3 und 4 $f_2.g_2 \prec f_1.g_1$. Da nach 2 $|f_1.g_1|^2 = (f_1, g_1) = 0$ gilt, muß tatsächlich $(f_2, g_2) = |f_2.g_2|^2 = (f_2.g_2, 0) = 0$ sein.

8. *Es gilt $f.(g+h) = f.g + f.h$, vorausgesetzt, daß auch $g+h$ in $\mathfrak{h}$ enthalten (also (vgl. 1) $g \perp h$) ist.*

Beweis. Aus $f.g \prec f$, $f.g \prec g$ und $g \prec g+h$ (letztere Beziehung folgt aus 1) ergibt sich nach 3 und 4

$$f.g \prec f.(g+h).$$

Ebenso gewinnt man:

$$f.h \prec f.(g+h).$$

Da nach 7 auch $f.g \perp f.h$ gilt, so bekommen wir

$$\begin{aligned}|f.(g+h) - f.g - f.h|^2 &= |f.(g+h)|^2 + |f.g|^2 + |f.h|^2 - \\ &- 2(f.(g+h), f.g) - 2(f.(g+h), f.h) + 2(f.g, f.h) = \\ &= |f.(g+h)|^2 - |f.g|^2 - |f.h|^2 = \\ &= (f, g+h) - (f, g) - (f, h) = 0,\end{aligned}$$

woraus schon die Behauptung folgt.

9. *Ist die Folge f_n „monoton wachsend“ (d. h. $f_n \prec f_{n+1}$) und ist die Zahlenfolge $|f_n|$ beschränkt (dies ist z. B. immer dann der Fall, wenn es ein g gibt, so daß $f_n \prec g$ für jedes n gilt), so konvergiert f_n gegen ein Element aus $\mathfrak{h}$.*

Beweis. Aus der Relation $h \prec k$ folgt wegen 2 stets

$$|k|^2 - |h|^2 = |k|^2 - (h, k) = (k - h, k) \geqq 0,$$

also

$$|h| \leqq |k|.$$

Ist also $f_n \prec g$ für jedes n, so bleibt $|f_n|$ unter $|g|$.

Ebenso folgt für $m \leqq n$: $|f_m| \leqq |f_n|$. Die beschränkte, monoton wachsende Zahlenfolge $|f_n|$ konvergiert, also gilt mit beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ und für genügend große m und n $(m \leqq n)$

$$|f_n - f_m|^2 = |f_n|^2 - 2(f_n, f_m) + |f_m|^2 =$$
$$= |f_n|^2 - 2|f_m|^2 + |f_m|^2 = |f_n|^2 - |f_m|^2 \leqq \varepsilon,$$

woraus wegen der Bedingung IV $f_n \to f$ folgt.

§ 3. Eine Aufspaltung von $\mathfrak{H}$ in paarweise orthogonale Teilräume.

Es sei $f_1, f_2, f_3, \ldots$ eine endliche bzw. unendliche Folge von Elementen aus $\mathfrak{h}$, die zusammen $\mathfrak{H}$ aufspannen (es gibt ja wegen der Separabilität von $\mathfrak{H}$ und wegen der Bedingung I eine solche).

Wir definieren eine andere Folge durch

$$g_1 = f_1, \quad g_2 = f_2 - g_1 \cdot f_2, \ldots, g_\nu = f_\nu - \Big(\sum_{\mu<\nu} g_\mu\Big) \cdot f_\nu, \ldots$$

Damit diese Definition einen Sinn habe, muß gezeigt werden, daß $\sum\limits_{\mu<\nu} g_\mu$ zu $\mathfrak{h}$ gehört. Für $\nu = 1, 2$ ist dies offenbar der Fall. Nehmen wir an, daß $\sum\limits_{\mu<\nu} g_\mu$ zu $\mathfrak{h}$ gehört, dann ist wegen der Bedingung III auch

$$\sum_{\mu<\nu+1} g_\mu = \sum_{\mu<\nu} g_\mu + g_\nu = \sum_{\mu<\nu} g_\mu + f_\nu - \Big(\sum_{\mu<\nu} g_\mu\Big) \cdot f_\nu$$

in $\mathfrak{h}$ enthalten. Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

Aus 1 folgt auch $g_\nu \perp \sum\limits_{\mu<\nu} g_\mu$, d. h. $\sum\limits_{\mu<\nu} (g_\mu, g_\nu) = 0$. Da $(g_\mu, g_\nu) \geqq 0$, muß $(g_\mu, g_\nu) = 0$ für $\mu \neq \nu$ sein.

Sei h ein beliebiges Element aus $\mathfrak{h}$. Man sieht leicht auf Grund von 8 durch vollständige Induktion ein, daß $h \cdot \sum\limits_{\mu<\nu} g_\mu = \sum\limits_{\mu<\nu} h \cdot g_\mu$ gilt. Nach 1 ist also $h \cdot \sum\limits_{\mu<\nu} g_\mu \prec h \cdot \sum\limits_{\mu<\nu+1} g_\mu$. Da auch $h \cdot \sum\limits_{\mu<\nu} g_\mu \prec h$ für jedes ν, so bekommen wir aus 9:

$$\sum_{\mu<\nu} h \cdot g_\mu \to h' \qquad \text{für} \qquad \nu \to \infty.$$

Da nach 7 auch $h \cdot g_\mu \perp g_\varkappa$ für $\mu \neq \varkappa$ gilt, so ist für $\nu > \varkappa$

$$(h - \sum_{\mu<\nu} h \cdot g_\mu, g_\varkappa) = (h, g_\varkappa) - \sum_{\mu<\nu} (h \cdot g_\mu, g_\varkappa) =$$
$$= (h, g_\varkappa) - (h \cdot g_\varkappa, g_\varkappa) = (h, g_\varkappa) - |h \cdot g_\varkappa|^2 = 0.$$

Aus der Stetigkeit des inneren Produkts ergibt sich daher für jedes $\varkappa$ $h - h' \perp g_\varkappa$, also auch $h - h' \perp \sum_{\mu<\nu} g_\mu$. Wegen

$$\sum_{\mu<\nu+1} g_\mu = g_\nu + \sum_{\mu<\nu} g_\mu = f_\nu + \Big[\sum_{\mu<\nu} g_\mu - \Big(\sum_{\mu<\nu} g_\mu\Big) \cdot f_\nu\Big]$$

und 1 ist $f_\nu \prec \sum_{\mu<\nu+1} g_\mu$, also gilt wegen 7 auch $h - h' \perp f_\nu$ für jedes ν. Da die Folge f_ν vollständig ist, muß somit die Gleichung

$$(*) \qquad h = h' = \sum_\mu h \cdot g_\mu$$

gelten.

Bedeute nun $\mathfrak{H}_\nu$ diejenige abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{H}$, welche durch die Elemente f mit der Eigenschaft $f \prec g_\nu$ aufgespannt ist. Da $g_\mu \perp g_\nu$ für $\mu \neq \nu$, so ist wegen 7 auch $\mathfrak{H}_\mu \perp \mathfrak{H}_\nu$. Da nach (*) jedes Element h in der Form

$$h = \sum_\nu h_\nu \quad \text{mit} \quad h_\nu \prec g_\nu, \quad \text{also} \quad h_\nu \in \mathfrak{H}_\nu,$$

darstellbar ist, so müssen die $\mathfrak{H}_\nu$ (infolge der Bedingung I) den ganzen Raum $\mathfrak{H}$ aufspannen.

Sei $\mathfrak{h}_\nu$ die Menge derjenigen Elemente von $\mathfrak{h}$, die in $\mathfrak{H}_\nu$ liegen. Aus (*) folgt leicht, daß für jedes Element f von $\mathfrak{h}_\nu$ die Beziehung $f \prec g_\nu$ gilt. Wenn wir statt $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{h}$ diese $\mathfrak{H}_\nu$ und $\mathfrak{h}_\nu$ (mit einem beliebig gewählten Index ν) betrachten, so sieht man leicht ein, daß die Bedingungen I—IV auch für $\mathfrak{H}_\nu$ und $\mathfrak{h}_\nu$ gültig bleiben.

Aus den Betrachtungen des nächsten Paragraphen wird folgen, daß es auf einem endlichen Intervall $\mathfrak{M}_\nu$ einen Lebesgue—Stieltjesschen Maß- und Integralbegriff gibt, so daß $\mathfrak{M}_\nu$ endliches Maß hat und daß der zugehörige Funktionenraum $\mathfrak{L}_2^{(\nu)}$ eine Verwirklichung von der gesuchten Art von $\mathfrak{H}_\nu$ liefert.

Wir können nun $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ so auf der x-Achse $\mathfrak{M}$ nebeneinanderreihen, daß sie paarweise punktfremd seien. Wenn wir der Menge der übrigbleibenden Punkte von $\mathfrak{M}$ das Maß Null zuschreiben, dann ist somit auf dem ganzen $\mathfrak{M}$ ein Lebesgue—Stieltjesches Maß- und Integralbegriff definiert. Der zugehörige

Funktionenraum sei mit $\mathfrak{L}_2$ bezeichnet. Die eineindeutigen isometrischen linearen Abbildungen $\mathfrak{H}_\nu \longleftrightarrow \mathfrak{L}_2^{(\nu)}$ erzeugen dann offenbar eine ebensolche Abbildung $\mathfrak{H} \longleftrightarrow \mathfrak{L}_2$.

Aus (*) folgt, daß ein beliebiges Element h aus $\mathfrak{h}$ bei dieser Abbildung in eine charakteristische Funktion aus $\mathfrak{L}_2$ übergeht. Umgekehrt ist jede charakteristische Funktion $h(x)$ aus $\mathfrak{L}_2$ in der Form $\sum\limits_\nu h_\nu(x)$ darstellbar, wo $h_\nu(x)$ außerhalb $\mathfrak{M}_\nu$ verschwindet und es gilt

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \Big(\sum_{\mu<\nu} h_\mu(x)\Big)^2 \leqq \int\limits_{\mathfrak{M}} \Big(\sum_{\mu} h_\mu(x)\Big)^2 = \int\limits_{\mathfrak{M}} h(x).$$

Es sei nun h_ν das zu $h_\nu(x)$ entsprechende Element in $\mathfrak{H}_\nu$, dann ist auch

$$\Big|\sum_{\mu<\nu} h_\mu\Big|$$

beschränkt. Aus 9 folgt dann

$$\sum_{\mu<\nu} h_\mu \to h \quad (\in \mathfrak{h}) \quad \text{für} \quad \nu \to \infty.$$

Dieses h ist dann das zu $h(x)$ entsprechende Element.

$\mathfrak{L}_2$ liefert also die gewünschte Verwirklichung von $\mathfrak{H}$.

§ 4. Verwirklichung durch ein $\mathfrak{L}_2$.

Der Beweis des Hinreichens der Bedingungen I—IV wurde durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen auf den Beweis der folgenden Behauptung zurückgeführt:

Gilt für die Teilmenge $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{H}$ außer I—IV noch die folgende Bedingung

V. *Es gibt ein ausgezeichnetes Element* f_0 *in* $\mathfrak{h}$, *so daß für jedes Element* f *die Beziehung* $f \prec f_0$ *gilt,*

so gibt es eine Verwirklichung von $\mathfrak{H}$ durch ein $\mathfrak{L}_2$ mit den gewünschten Eigenschaften. Die Grundmenge $\mathfrak{M}$, auf welcher die Funktionen aus $\mathfrak{L}_2$ definiert sind, ist dabei von endlichem Maß.

Es sei f ein gegebenes Element. Alle solche Elemente f', für welche $f' \prec f$ gilt, spannen eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{H}$ auf. Der zugehörige Projektionsoperator sei mit P_f bezeichnet.

Es gilt für beliebiges g $\;P_f g = f \,.\, g$. Zum Beweis beachte man erstens, daß wegen $f\,.\,g \prec f$ $\;P_f(f\,.\,g) = f\,.\,g$ gilt und zweitens, daß für $h \prec f$ nach 2, 5 und 6

$$(h, g-f.g) = (h, g) - (h, f.g) = (h, g) - |h.(f.g)|^2 =$$
$$= (h, g) - |(h.f).g|^2 = (h, g) - |h.g|^2 = 0,$$

also $g - f.g \perp h$ folgt.

Es gilt: $P_f P_g = P_g P_f = P_{f.g}$. Es folgt nämlich aus 5

$$P_f P_g h = f.(g.h) = (f.g).h = P_{f.g} h = P_{g.f} h = P_g P_f h$$

für beliebiges h. Wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{H}$ (Bedingung I) folgt also ganz allgemein $P_f P_g \varphi = P_g P_f \varphi = P_{f.g}$.

Ist $P_g - P_f$ *positiv definit, so ist* $f \prec g$ *und so gilt*

$$P_g - P_f = P_{g-f}.$$

Aus der Positivität von $P_g - P_f$ folgt bekanntlich die Gleichung $P_f P_g = P_f$. Aus Bedingung V ergibt sich also

$$f = P_f f_0 = P_f P_g f_0 = f.(g.f_0) = f.g, \text{ d. h. } f \prec g.$$

Ferner folgt aus 8 für beliebiges h

$$P_g h = g.h = (g-f+f).h = (g-f).h + f.h = P_{g-f} h + P_f h,$$

woraus sich wegen Bedingung I auch allgemeiner die Gleichung

$$P_g \varphi = P_{g-f} \varphi + P_f \varphi$$

ergibt.

Ist die Folge P_{f_n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *monoton wachsend (d. h. ist* $P_{f_{n+1}} - P_{f_n}$ *positiv definit), so existiert* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ $(\in \mathfrak{h})$ *und es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} P_{f_n} = P_f$.

Dann gilt ja nach den Obigen $f_n \prec f_{n+1}$. Wegen 9 und Bedingung V gilt also $f_n \to f$ $(\in \mathfrak{h})$. Da offenbar $f_n \prec f$ für jedes n, so erhalten wir für beliebiges h

$$|P_f h - P_{f_n} h|^2 = |P_{f-f_n} h|^2 = |(f - f_n).h|^2 = (f - f_n, h) \to 0.$$

Für die vertauschbaren Operatoren P_f können wir eine simultane Spektraldarstellung finden[3]). D. h. es gibt eine Zerlegung der Einheit E_x $(0 \leqq x \leqq 1)$ und Funktionen $p_f(x)$, so daß

$$P_f = \int_0^1 p_f(x)\, dE_x.$$

Es sei $u(x)$ die charakteristische Funktion eines beliebigen Teilintervalls von $[0, 1]$ und es sei

---

[3]) Vgl. J. v. Neumann, Über Funktionen von Funktionaloperationen, *Annals of Math.* (2), 32 (1931), S. 191—226, insbesondere S. 214.

$$U = \int_0^1 u(x)\, dE_x.$$

Aus Bedingung I folgt, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine lineare Komposition $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ gibt, so daß

$$\left| U f_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \right|^2 < \varepsilon,$$

also

$$\left| \left(U - \sum_{i=1}^{n} c_i P_{f_i} \right) f_0 \right|^2 < \varepsilon$$

gilt.

Es ist daher

$$\int_0^1 \left| u(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i p_{f_i}(x) \right|^2 d(E_x f_0, f_0) < \varepsilon.$$

Die Funktionen $p_f(x)$ bilden also im Raume $\mathfrak{L}_2$ der in Bezug auf die monoton wachsende Funktion $\alpha(x) = (E_x f_0, f_0)$ meßbaren und absolutwert-quadratisch integrierbaren Funktionen ein vollständiges Funktionensystem.

Seien f und g beliebig, dann ist

$$|f - g|^2 = |(P_f - P_g) f_0|^2 = ((P_f - P_g)^2 f_0, f_0) = \int_0^1 |p_f(x) - p_g(x)|^2 d\alpha(x)$$

und allgemeiner, seien f_i und g_j beliebig und seien die c_i, c_j' komplexe Zahlen, dann ist

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i - \sum_{j=1}^{m} c_j' g_j \right|^2 = \left| \left(\sum_{i=1}^{n} c_i P_{f_i} - \sum_{j=1}^{m} c_j' P_{g_j} \right) f_0 \right|^2 =$$

$$= \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} c_i p_{f_i}(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j' p_{g_j}(x) \right|^2 d\alpha(x).$$

Daraus folgt, daß die Zuordnung

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i p_{f_i}(x)$$

der Linearkompositionen eineindeutig, linear und isometrisch ist. Da diese Linearkompositionen in $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{L}_2$ überall dicht liegen, so kann man diese Zuordnung mit Erhaltung der obigen Eigenschaften auch für die übrigen Elemente von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{L}_2$ erweitern.

Wir können nun leicht einsehen, daß die so gewonnene Verwirklichung von $\mathfrak{H}$ durch dieses $\mathfrak{L}_2$ von der gewünschten Eigenschaft ist. Die zu f zugeordnete Funktion $p_f(x)$ ist ja äquivalent in Bezug auf $\alpha(x)$ mit einer charakteristischen Funktion, da P_f ein Projektionsoperator ist. Umgekehrt ist die charakteristische Funktion einer beliebigen in Bezug auf $\alpha(x)$ meßbaren Menge äquivalent mit einem $p_f(x)$, was man unschwer auf Grund der Vollständigkeit und der folgenden Abgeschlossenheitseigenschaften der $p_f(x)$ rechtfertigen kann:

a) $1-p_f(x)=p_{f_0-f}(x)$;

b) $p_f(x) \, . \, p_g(x)=p_{f.g}(x)$;

c) Ist die Folge $p_{f_n}(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ monoton wachsend, so strebt f_n gegen ein f aus $\mathfrak{h}$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} p_{f_n}(x)=p_f(x)$.

(Die Gleichungen in *a)—c)* sollen so verstanden werden, daß sie fast überall in Bezug auf $\alpha(x)$ gelten.)

Diese Eigenschaften folgen aber leicht aus den entsprechenden Eigenschaften der Projektionsoperatoren P_f, wenn man bemerkt, daß wegen der Bedingungen I und V $P_{f_0}=E$ (die identische Operation), also $p_{f_0}(x)=1$ ist.

Das Maß des Intervalls $[0, 1]$ ist gleich $\alpha(1)=(f_0, f_0)$, also tatsächlich endlich, womit alles bewiesen ist.

(Eingegangen am 1. Oktober 1936.)

Bibliographie.

V. Bjerknes, C. A. Bjerknes, sein Leben und seine Arbeit, deutsch von Else Wegener-Köppen, IV + 218 S., Berlin, J. Springer, 1933.

Die Lebensgeschichte des auch als Biograph Abels bekannten Hydrodynamikers C. A. Bjerknes wurde ursprünglich 1925 in norwegischer Sprache aus der Feder seines Sohns V. Bjerknes erschienen. Die deutsche Ausgabe stellt sich nicht nur das Ziel, das Leben des durch seine Untersuchungen der Analogien zwischen den hydrodynamischen und den elektrostatischen bzw. magnetischen Erscheinungen berühmten Physikers weiteren Kreisen bekannt zu machen, sondern auch die norwegischen kulturellen Verhältnissen des vorigen Jahrhunderts zu schildern. „Das Buch wendet sich deshalb nicht nur an den Fachmann im engeren Sinne, sondern auch an jeden Leser, den es interessiert, dem Arbeitsleben eines hochstrebendes Forschers zu folgen, der mit seltener Ausdauer seinem Ziel entgegenarbeitet — und dazu dies alles gegen einen doppelten Hintergrund gesehen: die bescheidenen Verhältnisse in einem kleinen, neu sich aufbauenden Lande — und die großen Entwicklungsphasen der Physik im vorigen Jahrhundert.“

E. Kalmár-Árvay.

Richard Petersen, Om en Klasse naestenperiodiske analytiske Funktioner, 94 S., Köbenhavn, Levin & Munksgaard 1933.

Diese Kopenhagener Habilitationsschrift behandelt die interessante Frage, wie eine in einem Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ der komplexen $s = \sigma + it$-Ebene reguläre analytische Funktion $f(s)$ beschaffen sein kann, wenn sie auf *jeder* vertikalen Geraden des Streifens fastperiodisch ist, d. h. wenn für jedes σ in $\alpha < \sigma < \beta$ die Funktion $F_\sigma(t) = f(\sigma + it)$ der reellen Variabeln t fastperiodisch ist. Ein auffallendes Ergebnis der Arbeit ist, daß hieraus nicht die Fastperiodizität von $f(s)$ im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ folgt, welche die gleichartige Fastperiodizität der Funktionen $F_\sigma(t)$ verlangt. Es wird aber gezeigt, daß es jedenfalls eine überall dicht liegende Menge von Teilstreifen gibt, in denen die Funktion fastperiodisch ist, und umgekehrt durch eine elegante Konstruktion, daß es zu jeder überall dicht liegenden Menge von Teilstreifen eine Funktion der genannten Art gibt, welche in genau diesen Teilstreifen fastperiodisch ist.

Börge Jessen.

C. Juel, Vorlesungen über projektive Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der v. Staudtschen Imaginärtheorie (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XLII), XI + 287 S., Berlin, J. Springer, 1934.

Von den zwei großen Leistungen v. Staudts, dem Nachweis der Möglichkeit einer von metrischen Elementen freien Grundlegung der projektiven Geometrie einerseits und der reellen Deutung imaginärer Gebilde andererseits, ist die erste ein wesentlicher Bestandteil vieler neueren Darstellungen der projektiven Geometrie. Von der zweiten sind zwar die einfachsten Grundbegriffe durchaus bekannt, wie aber auf dieser Grundlage ein synthetischer Aufbau der projektiven Geometrie mit Einschluß der imaginären Elemente durchgeführt werden kann, dürfte nur verhältnismäßig wenigen Mathematikern geläufig sein. Dies mag zum Teil damit zusammenhängen, daß die v. Staudtschen Publikationen recht schwer lesbar sind; in erster Linie beruht es aber wohl darauf, daß man auf Grund der v. Staudtschen Wurfrechnung von den Axiomen aus verhältnismäßig schnell zu projektiven Koordinaten und damit zur analytischen Behandlung gelangen kann, wodurch man der mit der Einführung des Imaginären verbundenen Schwierigkeiten weitgehend enthoben wird. Die Lehrbücher der Geometrie im Komplexen von Coolidge und E. Cartan gehen sogar von analytischen Definitionen der geometrischen Grundgebilde aus. Die „Vorlesungen" Juels knüpfen dagegen direkt an v. Staudt an. Sie enthalten einen auf die reelle projektive Geometrie gestützten synthetischen Aufbau der Geometrie im komplexen Gebiet in klarer und durchsichtiger Darstellung. Dieser an Schönheiten reiche Weg verdient zweifellos auch neben der im allgemeinen handlicheren analytischen Methode großes Interesse. Durch Juels Buch ist er nun leicht zugänglich geworden. Neben den durch die neuere Klarlegung der Grundlagen bedingten Abweichungen sowie vielen Beweisvereinfachungen und originellen Wendungen geht Juel insofern über v. Staudt hinaus, als er die von ihm selbst 1885 in seiner Habilitationsschrift und etwa gleichzeitig von C. Segre[1]) entwickelte Theorie der Antiprojektivitäten einbezieht, durch die das Gebiet eine befriedigende Abrundung erfahren hat. Gewissermaßen als Anwendungen der allgemeinen Theorie werden die projektiven Maßbestimmungen sowie die quadratischen birationalen Transformationen und die ebenen Kurven dritter Ordnung eingehend behandelt. Die Grundlagen des Buches bilden neben der erwähnten Habilitationsschrift mehrere Vorlesungen, die Juel an der Kopenhagener Universität gehalten hat. Für die Veröffentlichung ist aber der ganze Stoff unter Mitwirkung von D. Fog neu bearbeitet worden. Im Einzelnen gliedert sich der Inhalt folgendermaßen.

Als bekannt werden die Elemente der reellen projektiven Geometrie vorausgesetzt, wie sie in F. Enriques' *Vorlesungen über projektive Geometrie* (Leipzig und Berlin, 1915) entwickelt sind. Die wichtigsten der im Buche verwendeten Definitionen und Sätze sind in einem einleitenden Ka-

[1]) Im Vorwort irrtümlich Enrico Segre genannt.

pitel (größtenteils ohne Beweise) zusammengestellt. Weiterhin werden im ersten Abschnitt die imaginären Elemente eingeführt. Ein imaginärer Punkt ist eine orientierte elliptische Involution auf einer (reellen) Geraden. Das Dualitätsprinzip im Raum bzw. in der Ebene erfordert dann die Definitionen: Eine imaginäre Ebene ist eine orientierte elliptische Involution in einem Ebenenbüschel. Eine imaginäre Gerade in einer reellen Ebene (imaginäre Gerade erster Art) ist eine orientierte elliptische Involution in einem (reellen) Geradenbüschel dieser Ebene. Daneben hat man die in keiner reellen Ebene gelegenen imaginären Geraden zweiter Art zu betrachten. Eine solche kann definiert werden als eine orientierte elliptische Geradenkongruenz. (Diese Kongruenz besteht aus allen den reellen Geraden, die die imaginäre Gerade und ihre konjugierte schneiden.) Für die so eingeführten Elemente werden nun die Inzidenzrelationen definiert und die Verknüpfungseigenschaften bewiesen. In der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit der Punkte einer Geraden sind gewisse eindimensionale Teilmannigfaltigkeiten, die v. STAUDT *Ketten* nennt, projektiv ausgezeichnet. Unter einer Kette einer Geraden wird eine solche eindimensionale Mannigfaltigkeit ihrer Punkte verstanden, die durch Projektion mittels eines reellen Ebenenbüschels aus der Mannigfaltigkeit der reellen Punkte einer reellen Geraden erzeugt werden kann. (Wenn man die reellen und imaginären Punkte einer Geraden als Punkte einer komplexen Zahlenebene interpretiert, so entsprechen den Ketten die Kreise und Geraden der Zahlenebene.) Unter einem Wurf versteht man ein geordnetes Quadrupel von Punkten einer Geraden. Jedem Wurf läßt sich geometrisch ein Sinn zuordnen, der als positiv, neutral oder negativ bezeichnet wird. (In analytischer Sprache handelt es sich um das Vorzeichen des Imaginärteils des Doppelverhältnisses der vier Punkte.) Ein Wurf ist dann und nur dann neutral, wenn seine vier Punkte auf einer Kette liegen. Nun kann eine projektive Beziehung zwischen zwei Geraden als eine eineindeutige Punktabbildung definiert werden, bei der entsprechende Würfe gleichen Sinn haben. Eine antiprojektive Beziehung oder Symmetralität ist eine eineindeutige Abbildung, bei der entsprechende Würfe entgegengesetzten Sinn haben oder beide neutral sind. Damit ist die Grundlage für die projektive Geometrie auf einer Geraden geschaffen. Der Übergang zur analytischen Behandlung wird durch die Wurfrechnung vorgenommen. Zwei Würfe werden als gleich betrachtet, wenn sie projektiv sind. Addition und Multiplikation erscheinen als gewisse projektive Konstruktionen, die aus zwei Würfen einen dritten ergeben. Es wird dann nachgewiesen, daß diese Wurfrechnung dem Rechnen mit komplexen Zahlen isomorph ist. Der erste Abschnitt schließt mit einer Behandlung der Konstruktionsaufgaben dritten und vierten Grades, wobei auf die Parallelität der geometrischen Lösungen v. Staudts mit den gewöhnlichen algebraischen Auflösungen besonders hingewiesen wird.

Der zweite Abschnitt behandelt in entsprechender Weise die Theorie der Projektivitäten, Antiprojektivitäten, Korrelationen und Antikorrelationen in einer (reellen oder imaginären) Ebene.

Der dritte Abschnitt ist den projektiven Maßbestimmungen gewidmet. Hierbei werden die reellen Elemente bevorzugt. Bekanntlich ist aber die

Heranziehung imaginärer z. B. bei der Winkelmessung unumgänglich. Den Ausgangspunkt bildet die Gruppe der „Fundamentaltransformationen". Von dieser wird gefordert: Sie soll aus projektiven Transformationen bestehen. Ferner soll es genau zwei Transformationen der Gruppe geben, durch die ein „Linienelement" in ein vorgegebenes zweites übergeführt wird. Unter Linienelement ist hierbei ein Punkt mit hindurchgehender orientierten Geraden zu verstehen. Aus diesen Forderungen ergibt sich in einfacher Weise, daß die Gruppe ein Polarsystem, also einen Kegelschnitt in sich überführen muß, wodurch der Anschluß an die gewöhnliche Behandlungsweise gewonnen ist. Außer den Grundbegriffen der hyperbolischen und elliptischen Geometrie wird die Trigonometrie in diesen Geometrien kurz behandelt. Was die euklidische Geometrie betrifft, wird hauptsächlich auf die Kreisverwandtschaften und zwar unabhängig von der früher entwickelten Theorie der Ketten eingegangen.

Der vierte Abschnitt enthält eine rein synthetische Darstellung der Theorie der quadratischen Transformationen und der Kurven dritter Ordnung in der Ebene. Sind in der Ebene zwei Korrelationen gegeben, so kann man jedem Punkt den Schnittpunkt der beiden ihm entsprechenden Geraden zuordnen. Jede so entstehende Abbildung der Ebene auf sich heißt quadratische Transformation. Eine Kurve dritter Ordnung wird definiert als Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente in einem Kegelschnittbüschel und einem dazu projektiven Geradenbüschel. Fällt das Zentrum des Geradenbüschels in einen Grundpunkt des Kegelschnittbüschels, so erhält man eine unikursale (rationale) Kurve dritter Ordnung. Die auf die Wendepunkte bezüglichen Sätze stützen sich zum Teil auf den im Buche nicht bewiesenen Satz, daß jede Kurve dritter Ordnung wenigstens einen Wendepunkt besitzt. (Dies läßt sich durch topologische Mittel (Fixpunktsatz) oder durch algebraische Betrachtungen beweisen.) Im übrigen wird die Theorie in lückenlosem Aufbau sehr weit geführt.

W. Fenchel.

Weber—Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, ein Handbuch für Lehrer und Studierende, **erster Band: Arithmetik, Algebra und Analysis von Heinrich Weber, neubearbeitet von Paul Epstein,** fünfte Auflage, XVI + 582 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Die Neuauflage dieses beliebten Lehrbuches stimmt im Wesentlichen mit der vorigen überein, ausgenommen die beiden ersten Abschnitte. Diese beiden Abschnitte über die Einführung der natürlichen Zahlen und der elementaren ganzen Operationen wurden aber vollständig umgearbeitet. Neben der Betrachtung von „Aggregaten" (endlichen Mengen) gibt die Neuauflage einen guten Überblick über die verschiedenen Arten der Begründung der Zahlenlehre und der elementaren Operationen. Die weiteren Abschnitte (über Arithmetik, Algebra, Elemente der Analysis, insbesondere die unendlichen Reihen, aber ohne Differential- und Integralrechnung) sind —

von verschiedenen kleineren Verbesserungen und Ergänzungen abgesehen — ungeändert geblieben. Am Schluß von mehreren Abschnitten (Die natürlichen Zahlen; Irrationale Zahlen; Logarithmen; Komplexe Zahlen) wird je ein guter geschlichtlicher Überblick angegeben. Auch die übrigen Abschnitte wurden durch viele bibliographische und historische Hinweise ergänzt. Kein Zweifel besteht, daß das allgemein bekannte „WEBER-WELLSTEIN“ in der Neuauflage an Wert noch gewonnen hat. Es ist wegen seines reichen Inhalts und seiner klaren Darstellungsweise auch künftig zur Verbreitung von mathematischen Kenntnissen berufen.

Gyula (Julius) v. Sz. Nagy.

W. Lietzmann, Altes und neues vom Kreis (Math.-Phys. Bibliothek, Reihe I, Band 87), IV + 47 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1935.

Der ausgezeichnete Pädagog, Oberstudiendirektor Prof. W. LIETZMANN gibt in diesem Büchlein eine sehr gute Übersicht der über 2000 Jahre alten Kreislehre. Kann aber ein solches Werk neben den seit EUKLID unzählig erschienenen geometrischen Lehrbüchern noch etwas neues aufweisen? Wer dieses Büchlein von LIETZMANN durchgelesen hat, kann darauf nur mit ja antworten. Während die Lehrbücher nur zu gern immer einen traditionellen Weg zu gehen pflegen, Lehrsätze und Beweise aufeinander häufen, zeigt das vorliegende Büchlein, wie man von den verschiedensten Seiten die Kreislehre angreifen und sie meistern kann. Dabei verfolgt der Verfasser noch ein Ziel: den Irrtum zu beseitigen, daß die Kreislehre seit EUKLID für abgeschlossen gilt. Die zahlreichen interessanten Aufgaben geben dem Leser Anlaß zu kräftiger Mitarbeit.

Die durchwegs elementare, klare Darstellungsweise macht das Büchlein nicht nur zu einem ausgezeichneten Ratgeber für den Lehrer, sondern eignet es auch zur Verbreitung des mathematischen Denkens in weiteren Leserkreisen.

Béla v. Sz. Nagy.

Fr. Schilling, Die Pseudosphäre und nichteuklidische Geometrie. I. Teil: Die geodätischen Linien der Pseudosphäre und deren Umwelt, 2. erweiterte Auflage; **II. Teil:** Die geodätischen Kreise der Pseudosphäre und deren Umwelt, VI + 215 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1935.

Der erste Teil dieses ausgezeichneten Werkes ist ein verhältnismäßig wenig veränderter Abdruck der ersten Auflage von 1931. Die Theorie der verschiedenen Kreise in der konformen Abbildung der Pseudosphäre auf die euklidische Halbebene wird in der neuen Auflage auf eine einfachere und anschaulichere Weise behandelt, als in der ersten. Durch diese und einige andere Veränderungen wurden die Vorzüge der ersten Auflage noch erhöht. Der Referent stellt mit großer Anerkennung fest, daß die von ihm in einem Referat ausgedrückten Wünsche in der neuen Auflage vollständig erfüllt wurden.

Der Wert des Werkes wird auch durch den jetzt in der ersten Auflage erschienenen zweiten Teil noch erhöht. Dieser Teil behandelt die geodätischen Kreise auf der Pseudosphäre. Die drei Arten dieser Kreise werden auf zweierlei Weise: als Kreise konstanter geodätischer Entfernung und als Kreise konstanter Krümmung definiert. Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, eine möglichst anschauliche und zugleich einfache Darstellung über die Gestalt der verschiedenen Kreise zu geben. Diese Aufgabe ist offenbar mannigfaltiger und damit auch schwieriger, als die entsprechende Aufgabe auf der Kugelfläche. Die große Mannigfaltigkeit eigenartiger Kurven, die sich durch orthogonale Projektion der geodetischen Kreise auf die Basisebene der Pseudosphäre ergeben, entschädigt aber den Leser reichlich für die Schwierigkeit. Diese Projektionen werden durch zahlreiche schöne Figuren veranschaulicht. Durch Untersuchung solcher imaginären Punkte der Pseudosphäre, deren Abbildungen in der hyperbolischen Ebene reell sind, wird der enge Zusammenhang der Geometrie der Pseudosphäre mit der sich auf projektiver Grundlage aufbauenden hyperbolischen Geometrie in der Ebene in das richtige Licht gestellt. — Der Verfasser stellt sich auch die Aufgabe, die Eigenschaften der Pseudosphäre in Beziehung zu dem sie umgebenden euklidischen Raum klar zu stellen. Es handelt sich also hier nicht mehr um die inneren Eigenschaften der Fläche. In dieser Untersuchung wird somit die konforme Abbildung der Pseudosphäre auf die euklidische Halbebene allein nicht ausreichen, sondern man bedarf auch weitergehender Sätze der allgemeinen Flächentheorie. Die Untersuchung der Abwicklung der Tangentenfläche längs eines geodätischen Kreises ergibt das merkwürdige Resultat, daß ein geodätischer Kreis durch die Abbildung dieser Tangentenfläche in einen euklidischen Kreis überführt wird. Es werden auch einfache praktische Methoden angegeben um die geodätischen Linien und Kreise auf der Pseudosphäre zu erzeugen.

Dieses vorzügliche und originelle Werk wird gewiß zur Verbreitung der Kenntnisse über die nichteuklidische Geometrie und zugleich über die allgemeine Flächentheorie gute Dienste leisten, indem es ein eingehend ausgearbeitetes und höchst anschauliches Beispiel der allgemeinen Flächentheorie liefert.

Gyula (Julius) v. Sz. Nagy.

Rudolf Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil III (Teubners math. Leitfäden, Band 23), IX + 238 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1935.

Der vorliegende dritte Band besteht aus drei Hauptteilen: I. Krumme Flächen und krummlinige Koordinaten des Raumes; II. Linienintegrale im Raume, Doppelintegrale und mehrfache Integrale; III. Differentialgleichungen.

Der behandelte rein mathematische Stoff ist auffallend groß und mannigfaltig. Der Hauptwert des Buches besteht aber darin, daß das rein Mathematische immer in inniger Verbindung mit einer großen Anzahl von reizenden und lehrreichen Anwendungen dargestellt wird.

Wir begrüßen dieses ausgezeichnete Lehrbuch und sind überzeugt, daß es einen ebenso großen Erfolg haben wird, wie die beiden vorangehenden Bände.

Béla v. Sz. Nagy.

Stefan Kaczmarz und Hugo Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen (Monografje Matematiczne, Tom VI), VI + 298 S., **Warszawa—Lwów, 1935.**

Die Theorie der Orthogonalreihen entspringt einerseits aus den einzelnen Theorien der klassischen (Fourierschen, Legendreschen, Besselschen, usw.) Reihenentwicklungen, andererseits aus gewissen Untersuchungen von J. P. GRAM, T. N. THIELE, usw. Die ersteren sind aus physikalischen, die letzteren aus statistischen Problemen herausgewachsen. Die Theorie der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichungen und hauptsächlich die der Integralgleichungen haben die Notwendigkeit und Möglichkeit einer einheitlicheren Auffassung gezeigt. Grundlegende Arbeiten von D. HILBERT und E. SCHMIDT haben der Entwicklung der Theorie in dieser Richtung einen mächtigen Schwung gegeben.

Die Theorie der Orthogonalreihen ist seitdem in volle Blüte gelangt und zu einem kräftigen Werkzeug nicht nur ihrer beiden Muttergebiete: der Physik und der Statistik angewachsen, sondern hat sich auch zu einer fruchtbaren Methode der reinen Mathematik, sozusagen zu einer analytischen Geometrie der Funktionenräume entwickelt.

Die Verfasser sind die ersten, die eine Einzeldarstellung dieser ausgedehnten Theorie unternommen haben. Sie haben die gestellte Aufgabe mit bestem Erfolg gelöst. Sie geben hier eine sehr elegante und leicht übersichtliche Darstellung verschiedenster Zweige der Theorie.

Das Buch beginnt mit einer Zusammenfassung der notwendigen Vorkenntnisse, wie unter anderem Sätze über Reihenkonvergenz, Resonanztheoreme und das Prinzip der Kondensation der Singularitäten. Betreffend der näheren Eigenschaften des (im Buche ausschließlich benutzten) Lebesgueschen Integralbegriffs, sowie der linearen Operationen wird auf die in derselben Sammlung erschienenen Werke von S. SAKS und S. BANACH hingewiesen. Dann werden die grundlegenden Begriffe, wie Orthogonalität, Vollständigkeit, Abgeschlossenheit, usw. eingeführt. Das folgende Kapitel ist dem Fall des wichtigsten Raumtypus, L^2, gewidmet. Nach der Besprechung der Orthogonalisierung wird der grundlegende Riesz-Fischersche Satz über die Isometrie von L^2 und des Hilbertschen Koordinatenraumes bewiesen. Hier ist auch der Müntzsche Satz aufgenommen. Das nächste Kapitel behandelt klassische und neuere Beispiele von Orthogonalsystemen mit einigen Anwendungen auf wahrscheinlichkeitstheoretische und ergodische Probleme. Weiter werden Konvergenz- und Summabilitätsfragen, ebenfalls für L^2, untersucht. Das darauf folgende umfangsreiche Kapitel über Orthogonalreihen in anderen Räumen behandelt hauptsächlich die Verhältnisse in den Funktionenräumen L^p ($p \geqq 1$). Das Buch schließt mit ausführlichen Betrachtungen über Multiplikatoren, sowie lakunäre, biorthogonale und relativ orthogonale Reihen.

Ein Literaturverzeichnis zur Erleichterung der weiteren Studien ist beigefügt, ohne Anspruch auf Vollständigkeit.

Die mathematische Literatur ist zweifellos mit einem wertvollen und nützlichen Werke reicher geworden.

Béla v. Sz. Nagy.

David Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes, nebst einer Lebensgeschichte, VII + 435 S., Berlin, J. Springer, 1935.

Der vorliegende Schlußband enthält die folgenden Arbeiten.

Aus dem Gebiet der Analysis: Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück; Über die Entwicklung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variablen in eine unendliche nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitende Reihe; Über das Dirichletsche Prinzip; Zur Variationsrechnung; Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen; Zur Theorie der konformen Abbildung; Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen. Die Arbeiten über Integralgleichungen, die schon in Buchform veröffentlicht wurden, sind nicht aufgenommen. Statt dessen bekommen wir ein vorzügliches Referat aus der Feder von E. HELLINGER: Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen und unendliche Gleichungssysteme, — das auch über die an diese Arbeiten anknüpfende Literatur berichtet.

Aus dem Gebiet der mathematischen Grundlagenforschung: Axiomatisches Denken; Neubegründung der Mathematik; Die logischen Grundlagen der Mathematik; Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre. Die im Anhang der *Grundlagen der Geometrie* erschienenen Abhandlungen sind ausgelassen, statt deren referiert P. BERNAYS unter dem Titel: Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik, sehr ausführlich sowohl über die zur Zeit feststehenden Ergebnisse der Hilbertschen Beweistheorie, wie auch über die Schwierigkeiten, die sie noch zu überwinden hat.

Weitere Abhandlungen: Mathematische Probleme (Vortrag, gehalten auf dem Pariser Kongreß, 1900); Die Grundlagen der Physik; Naturerkennen und Logik; sowie drei Arbeiten über die Begründung der elementaren Strahlungstheorie.

Es sind auch Hilberts Nachrufe auf WEIERSTRASS, MINKOWSKI, DARBOUX und HURWITZ abgedruckt.

Der Band schließt mit einer glänzend verfaßten Lebensgeschichte Hilberts aus der Feder von O. BLUMENTHAL, ferner mit zwei Verzeichnissen betreffend Hilberts Lehrtätigkeit.

Béla v. Sz. Nagy.

Sur le potentiel newtonien et la théorie des fonctions analytiques.

Resumé de deux conférences faites en novembre 1936 à la Société Loránd Eötvös à Budapest et à la Faculté des Sciences de Szeged.

Par ROLIN WAVRE à Genève.

Les conférences faites portaient sur l'état actuel des trois problèmes suivants:

1. Etudier les singularités de la fonction analytique qui coïncide avec un potentiel newtonien dans un domaine vide de matière.

2. Existe-t-il des corps susceptibles d'engendrer le même potentiel au voisinage d'un point?

3. Reconnaître les corps ou les familles de corps susceptibles d'engendrer un potentiel qui dans un domaine coïncide avec une fonction analytique donnée.

STAHL en 1874 les avait déja abordés sur le conseil de WEIERSTRASS.

1. Il est très rare que l'on puisse obtenir une expression assez simple du potentiel newtonien créé par un corps donné pour pouvoir reconnaître quelles sont ses singularités et son domaine de WEIERSTRASS dans l'espace des trois variables complexes x, y, z. Mais, BRUNS, STAHL puis MM. J. HADAMARD, G. HERGLOTZ et E. SCHMIDT ont montré que sous certaines conditions le potentiel peut être prolongé dans le voisinage de l'espace réel au travers de la surface qui porte la matière attractive (simple et double couche) ou qui limite cette matière (potentiel de volume). La méthode employée par ces auteurs revient toujours à construire un corps voisin de la surface envisagée et de même potentiel que le corps donné. Comme le potentiel est une fonction analytique dans les régions vides de matière, il est ainsi possible de prolonger le potentiel de l'un des corps au travers d'une portion de ce corps que n'occupe pas le corps potentiellement équivalent. BRUNS, STAHL, HADAMARD et SCHMIDT emploient à cet effet le théorème de CAUCHY—KOWALEWSKA qui est appelé à jouer dans ce problème 1. un rôle fondamental. La solution d'un tel problème fournit une fonction que j'appelle „de passage“ et le potentiel, pris d'un côté de la surface et prolongé jusqu'en un point situé de l'autre côté, est égal au potentiel calculé directement de l'autre côté augmenté de la fonction de passage. Les conditions dans la résolution du problème CAUCHY—KOWALEWSKA sont les suivantes: Le laplacien de la fonction cherchée doit être égal à la densité de volume, la dérivée normale doit être égale à la densité de simple couche, et la fonction elle-même doit être égale à la densité de double couche changée de signe. Si l'on compare les deux potentiels de part et d'autre de la surface, les données précédentes traduisent les sauts du potentiel physique, de ses dérivées normales ou de ses dérivées normales secondes. Mais le potentiel physique de chaque côté est alors prolongeable au travers de la surface. J'ai généralisé les résultats antérieurs et démontré que si le problème de CAUCHY est résoluble la frontière d'une surface ouverte est une ligne de ramification pour la fonction analytique engendrée par le potentiel et que l'arête d'un volume attirant si elle existe, est également une ligne de ramification au voisinage de laquelle viennent se raccorder en général une infinité de branches de la fonction analytique envisagée. Dans ce résumé où je m'efforce d'exprimer les choses sans formule, je voudrais faire apercevoir que la frontière d'une surface attirante est toujours une singularité du potentiel. En effet, comme on le sait par la théorie classique, il n'y a pas raccord au point de vue des fonctions analytiques entre les déterminations du potentiel de part et d'autre de la surface; ce sont deux branches distinctes jusqu'à la frontière, tandis que les deux branches se raccordent en dehors. La frontière sera donc toujours une singularité. Dans les conditions où se placent MM. HADAMARD et SCHMIDT, le potentiel est prolongeable au travers de tout point intérieur à la surface et redonne de l'autre côté le potentiel calculé plus la fonction de passage qui elle est holomorphe dans le voisinage de la frontière. Alors, rien n'empêche de revenir au point de départ et la différence entre les deux branches est égale à la fonction de passage qui joue ainsi le rôle d'une fonction période pour un circuit décrit autour de la frontière. A part ces frontières ou arêtes, le potentiel prolongé n'aura que les singularités de la fonction de passage, solution du problème de CAUCHY—KOWALEWSKA.

Le véritable domaine des fonctions analytiques est, comme on le sait, le domaine complexe. On peut donc étudier les potentiels réels qui sont, dans les régions vides de matière, développables en séries de puissances, également en donnant à ces variables x, y, z des valeurs complexes. M. BEER a étendu la méthode de la fonction de passage aux domaines complexes. Dans ce dernier on peut, en effet, être à distance nulle du corps attirant sans être en un point de ce corps. Il existe une multiplicité à six dimensions à distance nulle d'une surface donnée. Les frontières de cette multiplicité sont à cinq dimensions et c'est au travers de ces dernières que la méthode de HADAMARD—SCHMIDT convenablement interprétée s'applique encore. Mais il y a plus! Prendre les potentiels réels et y substituer les variables complexes est une chose. Substituer les variables complexes dans les intégrales qui définissent le potentiel est une autre chose. Ce second procédé peut fournir de nouveaux potentiels qui n'apparaissaient pas dans le domaine réel. C'est ainsi qu'il existe trois potentiels pour une surface sphérique homogène. Les deux premiers sont connus, le troisième est engendré dans l'espace complexe, plus exactement dans le domaine à six dimensions réelles dont les points sont tous à distance nulle de la sphère. Dans les intégrales, la distance est prise sous la forme habituelle de PYTHAGORE mais les coordonnées du point-argument sont complexes et ces potentiels satisfont à l'équation de LAPLACE en dérivant deux fois par rapport à chacune des variables complexes.

Revenons maintenant au domaine réel. Considérons une surface ouverte s'appuyant sur une ligne fermée. Donnons nous en plus une fonction harmonique au voisinage de la surface. Chargeons la surface d'une densité de double couche égale à la fonction harmonique changée de signe et d'une densité de simple couche égale à la derivée normale de la fonction harmonique sur la surface. Le potentiel engendré par ces deux distributions sera à son tour une fonction harmonique multiforme qui admet la courbe comme ligne de ramification avec la fonction donnée comme fonction-période. Remarquons d'autre part que les polyèdres homogènes envisagés comme surfaces ou comme volumes engendrent un potentiel qui n'a, dans tout l'espace réel, que les arêtes du polyèdre comme singularités et ce sont des lignes de ramification. On voit par là que les potentiels classiques permettent facilement de construire des fonctions harmoniques multiformes des trois variables réelles. Au siècle dernier APPELL avait formé une telle fonction en plaçant deux masses en deux points de l'espace complexe. M. SOMMERFELD avait construit une fonction jouant le rôle de l'inverse de la distance dans un espace de RIEMANN à n exemplaires qui se ramifie autour de l'axe des z. M. S. BERGMANN engendre aujourd'hui des fonctions harmoniques multiformes au moyen d'une procédé entrevu par M. WHITTAKER. Comme nous venons de voir, les potentiels les plus simples sont de telles fonctions.

2. Dès 1883 M. VOLTERRA remplaçait une distribution de matière de l'espace réel par une distribution dans l'espace complexe de manière que le potentiel reste le même au voisinage d'un point et par conséquent dans toute une région libre de matière. L'exemple de la sphère homogène est de son centre chargé de la masse totale est un phénomène bien connu. La méthode du balayage d'autre part consiste à faire des transports de masse sans modifier le potentiel dans une certaine région. La fonction de GREEN s'obtient en construisant un potentiel de simple couche sur une surface fermée et engendrant le même potentiel qu'un seul point de masse unité situé à l'intérieur de la couche fermée. Nous avons dit plus haut que les méthodes de prolongement analytique pratiquées jusqu'à ce jour sont fondées sur les corps potentiellement équivalents. D'autre part on sait qu'une fonction harmonique est toujours représentable par un potentiel de simple chouche et un potentiel de double couche étalées sur une surface fermée située, ainsi que son intérieur, toute entière dans un domaine où la fonction est harmonique; les surfaces fermées peuvent être choisies arbitrairement et il y a donc toujours ici une infinité de corps potentiellement équivalents. C'est à cause de ce procédé d'engendrement des fonctions harmoniques que les mathématiciens allemands les appellent „Potentialfunktionen".

Pour aboutir à des déterminations uniques des corps par leurs potentiels dans une certaine région, il faudra donc dans le

No. suivant particulariser la nature du corps attirant. Il faut par exemple s'imposer que sur une surface fermée le potentiel ne soit engendré que par une simple couche. Ou encore requerir que ce soit un volume homogène simplement connexe et alors on peut aboutir à des théorèmes d'unicité ou tout au moins d'unicité locale. L'on peut alors démontrer que certains corps de nature déterminée ne peuvent pas être déformés sans que leur potentiel varie en tout point de l'espace.

3. Ainsi, une simple couche ouverte ne peut pas être remplacée par une simple couche voisine (sous certaines conditions de régularité). Car la frontière devrait être commune aux deux surfaces en tant que ligne de ramification du potentiel, la fonction-période devrait être la même en tant que fonction-période du potentiel. Elle devrait être nulle sur l'une et l'autre surface et être harmonique entre ces surfaces, elle serait donc identiquement nulle et les densités de simple couche, égales aux dérivées normales de cette fonction-période, seraient identiquement nulles. M. P. Dive a démontré que deux corps convexes ne peuvent pas engendrer le même potentiel dans leur partie commune. Il s'agit ici de deux volumes de densités positives. On voit par ces exemples qu'il est impossible d'obtenir des corps potentiellement équivalents quand on donne à l'avance certaines caractéristiques des corps envisagés. On peut se demander si un polyèdre homogène admet des déformations continues qui laissent le potentiel invariant soit à l'extérieur soit à l'intérieur du corps.

Les exemples cités tout à l'heure nous acheminent vers le troisième problème qui est de reconnaître un corps étant donné son potentiel. Comme nous l'avons vu, un potentiel peut être engendré par une série de corps équivalents et il faut ajouter des conditions supplémentaires pour aboutir à une détermination complète du corps générateur. Dans la résolution du problème de Dirichlet on engendre une fonction harmonique à l'intérieur d'une surface au moyen d'un potentiel de double couche par la méthode de Fredholm. La surface est alors donnée et la densité est complètement déterminée. On aboutit également à une détermination unique en imposant au corps d'être un volume et d'engendrer un potentiel intérieur qui soit donné par une forme du second degré augmentée d'une constante. MM. Dive et Nikliborc ont en effet démontré que le potentiel d'un ellipsoïde plein homogène caractérise entièrement cet ellipsoïde ; en d'autres termes, il n'existe pas de corps qui puissent créer le même potentiel qu'un ellipsoïde homogène dans la partie commune aux deux volumes.

Le fait que les frontières des surfaces ou les arêtes des volumes sont dans des conditions très générales des lignes de ramification pour le potentiel est une indication précieuse pour la détermination des corps par leurs potentiels.

(Reçu le 17 janvier 1937)

Über das Gesetz der großen Zahlen.

Harald Bohr zum fünfzigsten Geburtstage am 22. April 1937 gewidmet.

Von WILLY FELLER in Stockholm.

1. Eine Folge von stochastischen Veränderlichen $X_1, X_2, \ldots$, *konvergiert nach Wahrscheinlichkeit*[1]) gegen Null, wenn die Wahrscheinlichkeit der Relation $|X_n| > \varepsilon > 0$ mit wachsendem n gegen Null strebt, d. h. wenn für die Verteilungsfunktionen $V_n(x)$ der X_n die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} V_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0, \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

gilt. Man sagt ferner allgemein, daß die Folge $\{X_n\}$ dem *Gesetz der großen Zahlen* gehorcht, wenn es eine Zahlenfolge $\{b_n\}$ gibt derart, daß die Folge der stochastischen Veränderlichen

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k) = \frac{1}{n} S_n$$

nach Wahrscheinlichkeit gegen Null strebt. Im Falle gegenseitig unabhängiger Veränderlichen X_n hat KOLMOGOROFF eine notwendige und hinreichende Bedingung hierfür angegeben[2]). Eine schär-

---

[1]) Für alle Definitionen sowie für eine mathematisch einwandfreie Fassung aller benutzten Begriffsbildungen beziehe ich mich stets auf die grundlegenden Darstellungen von A. KOLMOGOROFF, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, bzw. von A. KHINTCHINE, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, beides in: Ergebnisse der Mathematik, Bd. 2 (Berlin, 1933). Jedoch bezeichne ich die „zufälligen Veränderlichen" aus sprachlichen Gründen lieber als *stochastische Veränderliche* (variable aléatoire = reelle Funktion auf der Grundmenge).

[2]) A. KOLMOGOROFF, Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Größen, *Math. Annalen*, **99** (1928), S. 300—319. Man beachte hierzu auch die Berichtigung und Abänderung: A. KOLMOGOROFF, Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über die Summen zufälliger Grössen", *Math. Annalen*, **102** (1930), S. 484—488.

fere, nur hinreichende Bedingung hat kürzlich mit anderen Methoden auch PLESSNER[3]) abgeleitet.

Im folgenden wird ein neuer Beweis des Kolmogoroffschen Satzes gegeben, und der Satz gleichzeitig verallgemeinert in einer Richtung, die nahegelegt wird durch eine von KHINTCHINE neuerdings in einem Spezialfall behandelte Frage[4]). Eine neue Herleitung der Kolmogoroffschen Bedingung ist vielleicht für die Vereinheitlichung der Methoden nicht ohne Interesse. Die ungeahnten diesbezüglichen Fortschritte in der neuen Wahrscheinlichkeitsrechnung — die man wesentlich der Moskauer mathematischen Schule verdankt — lassen immer mehr die Behandlungsweise mit Hilfe der Differentialgleichungen und die mit Hilfe der charakteristischen Funktionen in den Vordergrund treten. Der folgende Beweis benutzt letztere und schließt sich eng an meine Herleitung der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Gültigkeit des Laplace—Ljapounoffschen Grenzwertsatzes an[5]), — man kann das Gesetz der großen Zahlen gewissermaßen als Ausartungsfall von diesem ansehen. Diese Behandlungsweise gestattet es, ohne größeren Aufwand an Mühe an Stelle der Normierung $\frac{1}{n} S_n$ beliebige allgemeinere Normierungen $\frac{1}{a_n} S_n$ zu betrachten. Wir beweisen nämlich folgenden

Satz. *Sind die X_n paarweise unabhängige stochastische Veränderliche mit den Verteilungsfunktionen $V_n(x)$, so ist für die Existenz einer Konstantenfolge $\{b_n\}$, mit welcher $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k)$ nach Wahrscheinlichkeit gegen Null strebt, hinreichend, daß*

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>a_n} dV_k(x) = o(1)$$

und

[3]) A. PLESSNER, Über das Gesetz der großen Zahlen, *Recueil Math. (= Matematitscheski Sbornik, Moskau)*, **43** (= neue Folge, 1) (1936), S. 165—168.

[4]) A. KHINTCHINE, Su una legge dei grandi numeri generalizzata, *Giornale Istituto Attuari*, **7** (1936), S. 365—377.

[5]) W. FELLER, Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung I, *Math. Zeitschrift*, **40** (1935), S. 521—559 und II, *ebenda*, **42** (1937), S. 301—312.

(2) $$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<a_n} x^2 d\,V(x) = o(1)$$

ist. Mann kann dann

(3) $$b_n = \int\limits_{|x|<a_n} x\,d\,V_n(x)$$

setzen. Wurden die Koordinatennullpunkte so gewählt, daß für alle n

(4) $$V_n(+0) \geqq \lambda > 0, \quad V_n(-0) \leqq 1-\lambda$$

ist, so sind diese Bedingungen auch notwendig.

Gleichzeitig mit $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k)$ strebt $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k')$ dann und nur dann nach Wahrscheinlichkeit gegen Null, wenn (vgl. Nr. **2,** S. 195)

(5) $$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_k') = o(1)$$

ist. Folgen $\{a_n\}$, mit denen (1) und (2) erfüllt sind, gibt es offenbar *immer,* und es handelt sich gewissermaßen um die Bestimmung ihrer unteren Wachstumsgeschwindigkeit.

Für $a_n = n$ ergibt sich der Satz von KOLMOGOROFF. Der Zusammenhang mit der erwähnten Fragestellung (vgl. [4])) von KHINTCHINE ist folgender. Dort wird einschränkend vorausgesetzt, daß alle X_n positiv sind und dieselbe (stetige) Verteilungsfunktion $V(x)$ haben:

(6) $$V_n(x) = V(x), \quad V(0) = 0.$$

Gefragt wird, wann man die a_n und die b_n so wählen kann, daß

(7) $$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$$

wird. Dies ist nun nach (3) gleichbedeutend mit

(8) $$\frac{n}{a_n}\int_0^{a_n} x\,d\,V(x) = 1 + o(1),$$

was vermöge (1)

(9) $$\int_{a_n}^{\infty} d\,V(x) = o\left(\frac{1}{a_n}\int_0^{a_n} x\,d\,V(x)\right)$$

ergibt. Wegen (1) und (8) strebt aber trivialerweise $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, und daher folgt aus (9) allgemeiner

$$\int_z^\infty dV(x) = o\left(\frac{1}{z}\int_0^z x\,dV(x)\right), \qquad z \to \infty. \tag{10}$$

Wenn umgekehrt (10) erfüllt ist, so kann man leicht die a_n so wählen, daß (1) und (8) bestehen. Die Bedingung (2) ist aber im Falle (6) eine Folge aus (10). Man hat nämlich

$$\int_0^z x^2 dV(x) = 2\int_0^z x\{V(z) - V(x)\}\,dx \leq 2\int_0^z x\,dx \int_x^\infty dV(y),$$

woraus unschwer die Abschätzung

$$\frac{n}{a_n^2}\int_0^{a_n} x^2 dV(x) = o\left(\frac{n}{a_n}\int_0^{a_n} x\,dV(x)\right) = o(1)$$

folgt. Für die Möglichkeit der fraglichen Konstantenwahl ist also (10) notwendig und hinreichend. (Die von KHINTCHINE gegebene Bedingung führt man auf (10) zurück, indem man die Reihenfolge der Integrationen vertauscht, und eine davon ausführt.)

Im allgemeinen Falle $V_n(x) = V(x)$ und bei der üblichen Normierung $a_n = n$ ist (1) gleichbedeutend mit $V(-z) + 1 - V(z) = o\left(\frac{1}{z}\right)$. Die Bedingung (2) ist dann eine einfache Folge hieraus. Diese Bedingung wurde auch schon mit Hilfe von charakteristischen Funktionen von CRAMÉR[6]) hergeleitet. Im Falle eines endlichen ersten Moments wurde dieselbe Methode bereits von KHINTCHINE[7]) benutzt.

Es sei noch bemerkt, daß der obige Satz unmittelbar eine präzisere Antwort auf die mit dem sog. *Petersburger Paradoxon* verbundene Fragestellung liefert (vgl. Nr. **7**, S. 200 f.).

2. Wird

$$v_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dV_n(x)$$

---

[6]) In einem demnächst in den *Cambridge Tracts* erscheinendem Büchlein.

[7]) A. KHINTCHINE, Sur la loi des grands nombres, *Comptes Rendus Paris*, **189** (1929), S. 477—479.

gesetzt, so ist die charakteristische Funktion von $(X_n - b_n)$ bekanntlich $e^{-ib_nt}v_n(t)$ und die von $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k)$ gleich

$$(11) \qquad w_n(t) = e^{-\frac{it}{a_n}\sum_{k=1}^{n} b_k} \prod_{k=1}^{n} v_k\left(\frac{t}{a_n}\right).$$

Nach einem bekannten Satz von P. LÉVY[8]) über die konvergenz von charakteristischen Funktionen ist die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit gegen Null von $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k)$ gleichbedeutend damit, daß

$$(12) \qquad w_n(t) \to 1$$

strebt, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Intervall.

(11) und (12) zusammen ergeben übrigens unmittelbar die Richtigkeit der an (5) angeknüpften Bemerkung. — Wenn man ferner den Fall ausschließt, daß $|v_n(t)| \equiv 1$ ist für alle n (in welchem Falle der Satz trivial ist), so folgt aus (12) unmittelbar, daß $a_n \to \infty$ streben muß. Man sieht daher leicht, daß wir uns im folgenden stets auf *monoton über alle Grenzen wachsende Folgen* $\{a_n\}$ beschränken können.

3. Wir wollen zunächst zeigen, daß die Bedingungen (1) und (2) *notwendig* sind, und gehen zu diesem Zweck von (12) aus, und setzen außerdem die Richtigkeit von (4) voraus.

Aus (12) folgt zunächst, daß gleichmäßig in jedem Intervall $|t| < T$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{itx}{a_n}}\, dV_n(x + b_n) \to 1$$

strebt. Es strebt daher für jedes feste $\eta > 0$

$$\int_{|x| > \eta a_n} \left(1 - \cos\frac{xt}{a_n}\right) dV_n(x + b_n) \to 0,$$

und durch Integration über ein festes Intervall $0 < t < T > \frac{1}{\eta}$ folgt hieraus, daß auch

$$0 \leq \left(T - \frac{1}{\eta}\right) \int_{|x| > \eta a_n} dV_n(x + b_n) \leq \int_{|x| > \eta a_n} \left(T - \frac{a_n}{x}\sin\frac{xT}{a_n}\right) dV_n(x + b_n) \to 0$$

[8]) P. LÉVY, *Calcul des Probabilités* (Paris, 1925), S. 195 und 197.

geht. Somit strebt für jedes positive η

$$\int\limits_{|x|>\eta a_n} d V_n(x+b_n) \to 0. \tag{13}$$

Aus (4) und (13) folgt nun offenbar weiter, daß

$$|b_n| = o(a_n) \tag{14}$$

sein muß. Hieraus und aus (12) schließt man aber unter Beachtung der Monotonie von $\{a_n\}$ mühelos, daß für $n \to \infty$ gleichmäßig in $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\int\limits_{|x|>\eta a_n} d V_k(x) \to 0 \tag{15}$$

strebt.

Wir zeigen nun weiter, daß in jedem Intervall $|t| < T$ für $n > N = N(T)$ und $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{xt}{a_n} d V_k(x)\right)^2 \leqq \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{xt}{a_n} d V_k(x) \tag{16}$$

ist. Hierzu setzen wir $\eta = \frac{\pi}{2T}$. Dann ist $\sin \frac{xt}{a_n}$ für $0 < t < T$ im Intervall $0 < x < \eta a_n$ positiv, und in $-\eta a_n < x < 0$ negativ. Sobald also die linke Seite in (15) kleiner bleibt als $\frac{\lambda}{2}$, so folgt aus (4), daß für jedes feste $|t| < T$ die Variation von sämtlichen $V_k(x)$ über jede der beiden Mengen, in denen $\sin \frac{xt}{a_n}$ nichtnegativ bzw. nichtpositiv ist, mindestens gleich $\frac{\lambda}{2}$ ist. Eine Anwendung der Schwarzschen Ungleichung ergibt dann unschwer die Richtigkeit von (16).

Nach (12) strebt nun

$$\prod_{k=1}^{n} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ixt}{a_n}} d V_k(x) \right| \to 1; \tag{17}$$

aus (16) folgt aber, daß

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ixt}{a_n}} d V_k(x) \right|^2 \leqq \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{xt}{a_n} d V_k(x) \right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{xt}{a_n} d V_k(x) \leqq$$

$$\leqq 1 - \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{xt}{a_n} d V_k(x)$$

ist. Wegen (17) strebt also

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{xt}{a_n} \, d V_k(x) \to 0,$$

und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Intervall. Daher hat man insbesondere für jedes positive η

$$\text{(18a)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \eta a_n} \left(1 - \cos \frac{2xt}{a_n}\right) d V_k(x) \to 0$$

und

$$\text{(18b)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| < \eta a_n} \left(1 - \cos \frac{2xt}{a_n}\right) d V_k(x) \to 0.$$

Integriert man (18a) über $0 < t \leq T > \frac{1}{2\eta}$, so erhält man (vgl. die Herleitung von (13)), daß

$$\text{(19)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \eta a_n} d V_k(x) \to 0$$

streben muß. Damit ist zunächst die Notwendigkeit von (1) bewiesen.

Nun wähle man ein festes η so klein, daß für $|t| < T$ und $0 \leqq |x| \leqq \eta a_n$

$$1 - \cos \frac{2xt}{a_n} \geqq \frac{x^2 t^2}{a_n^2}$$

bleibt. Aus der Relation (18b) folgt dann unmittelbar, daß mit diesem η

$$\text{(20)} \qquad \frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| < \eta a_n} x^2 d V_k(x) \to 0$$

strebt. Da aber (19) für jedes $\eta > 0$ gilt, folgert man leicht, daß man nachträglich auch in (20) $\eta > 0$ beliebig, insbesondere gleich 1 wählen darf. Damit ist auch die Notwendigkeit von (2) bewiesen.

4. Um nun zu beweisen, daß unsre Bedingungen *hinreichend* sind, beginnen wir mit folgendem

H i l f s s a t z. *Es sei $\{a_n\}$ irgend eine monoton über alle Grenzen wachsende Zahlenfolge, mit welcher für jedes $\eta > 0$ die Relation*

(19) *besteht, und man definiere die* b_n *durch* (3). *Dann ist*

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|=o(1). \tag{21}$$

Ein gleicher Hilfssatz wurde auch für den Beweis des zentralen Grenzwertsatzes benutzt[9]). Der dort gegebene Beweis benutzt jedoch wesentlich, daß $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 1$ strebt, was hier nicht zuzutreffen braucht. Um also den Satz allgemein zu beweisen, werde $N=N(\varepsilon)$ so bestimmt, daß für $n\geqq N$

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq\frac{1}{e}a_n} dV_k(x)<\varepsilon \tag{22}$$

wird. Dann ist nach (3)

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=N}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|=\frac{1}{a_n}\sum_{k=N}^{n}\left|\int\limits_{a_k\leqq|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{a_n}\sum_{k=N}^{n}\int\limits_{e^{[\log a_k]}\leqq|x|<e^{[\log a_n]+1}}|x-b_k|\,dV_k(x)\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{a_n}\sum_{s=[\log a_N]}^{[\log a_n]}\sum_{a_N\leqq a_k\leqq e^{s+1}}\int\limits_{e^s\leqq|x|<e^{s+1}}|x-b_k|\,dV_k(x).$$

Da nun offenbar stets $|b_k|\leqq a_k$ bleibt, ist die letzte rechte Seite weiter

$$\leqq\frac{2}{a_n}\sum_{s=[\log a_N]}^{[\log a_n]}e^{s+1}\sum_{a_N\leqq a_k\leqq e^{s+1}}\int\limits_{|x|\geqq e^s}dV_k(x)\leqq$$

$$\leqq\frac{2\varepsilon}{a_n}\sum_{s=[\log a_N]}^{[\log a_n]}e^{s+1}<2\varepsilon e^2.$$

Ferner erhält man durch Aufspaltung des Integrationsintervalls

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N-1}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{2a_N}{a_n}\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{|x|<a_N}dV_k(x)+2\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{|x|\geqq a_N}dV_k(x)\leqq\frac{2a_N}{a_n}N+2\varepsilon.$$

Da $N=N(\varepsilon)$ fest ist und $a_n\to\infty$ strebt, geht die rechte Seite gegen 2ε, so daß schließlich für hinreichend große n insgesamt

[9]) a. a. O. [5]), I., S. 534.

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|<\varepsilon(2e^2+3)$$

wird, w. z. b. w.

5. Wir brauchen noch folgenden

Hilfssatz. *Wenn mit irgend einer Zahlenfolge* $\{a_n\}$ *die Relationen* (1) *und* (2) *gelten, und wenn man* b_n *durch* (3) *definiert, so ist*

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>a_n}dV_k(x+b_k)=o(1), \tag{23}$$

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<a_n}x^2dV_k(x+b_k)=o(1), \tag{24}$$

und

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}x\,dV_k(x+b_k)\right|=o(1). \tag{25}$$

Zum Beweise bemerke man zunächst, daß wegen (1) und (2) offenbar *für jedes* $\eta>0$

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>\eta a_n}dV_k(x)\to 0 \tag{26}$$

strebt. Ferner folgt aus (26) und (3) wegen $a_n\to\infty$ (vgl. Nr. 2, S. 195) unmittelbar, daß

$$|b_n|=o(a_n) \tag{27}$$

ist. (23) ist nun eine triviale Folge aus (26) und (27).

Da wir ferner die $\{a_n\}$ monoton vorausgesetzt haben, wird nach (27) für hinreichend große n sicher $\max[|b_1|,\dots,|b_n|]<\frac{1}{2}a_n$. Dann hat man aber

$$0\leqq\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<a_n}x^2dV_k(x+b_k)\leqq\frac{2}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<2a_n}(x-b_k)^2dV_k(x)=$$

$$=\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int\limits_{|x|<2a_n}x^2dV_k(x)-2b_k\int\limits_{|x|<2a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)-b_n^2\int\limits_{|x|<2a_n}dV_k(x)\right\}\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<a_n}x^2dV_k(x)+4\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq a_n}dV_k(x)+$$

$$+\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|+2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq a_n}dV_k(x),$$

und alle Größen rechts streben nach (2), (1) und (21) gegen Null. Damit ist auch (24) bewiesen. Zum Beweise von (25) genügt es schließlich zu beachten, daß für hinreichend große n wegen (27)

$$\frac{1}{a_n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n} x\,d\,V_k(x+b_k)\right|-\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,d\,V_k(x)\right|\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{2}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\frac{a_n}{2}\leqq|x|\leqq 2a_n}(|x|+|b_k|)\,d\,V_k(x)\leqq 4\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq\frac{a_n}{2}}d\,V_k(x)=o(1)$$

ist, w. z. b. w.

6. Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht zu beweisen, daß die Bedingungen des Satzes von S. 192 f. *hinreichend* sind. Man hat nämlich für $|t|<T$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1-e^{\frac{ixt}{a_n}}\right)d\,V_k(x+b_k)\right|\leqq$$

$$\leqq 2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq a_n}d\,V_k(x+b_k)+\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}\frac{xt}{a_n}\,d\,V_k(x+b_k)\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}\left(1+\frac{ixt}{a_n}-e^{\frac{ixt}{a_n}}\right)d\,V_k(x+b_k)\right|\leqq\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq a_n}d\,V_k(x+b_k)+$$

$$+\frac{T}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}x\,d\,V_k(x+b_k)\right|+\frac{T^2}{2a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<a_n}x^2\,d\,V_k(x+b_k),$$

und die rechte Seite strebt nach dem Hilfssatz von Nr. **5**, S. 199 gegen Null. Daraus folgt unmittelbar, daß in jedem endlichen Intervall gleichmäßig

$$w_n(t)=\prod_{k=1}^{n}\left\{1-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1-e^{\frac{ixt}{a_n}}\right)d\,V_k(x+b_k)\right\}\rightarrow 1$$

strebt und das ist nach Nr. **2**, S. 195 gleichwertig mit der Behauptung.

7. Es sei noch zum Schluß ein Wort über das vielbesprochene sog. *Petersburger Paradoxon* gestattet. Dieses besteht in der falschen Folgerung aus dem Gesetze der großen Zahlen, daß man bei einem Glückspiel, bei dem die mathematische Erwartung des Gewinns unendlich groß ist, beliebig große Einsätze zahlen dürfe, und doch praktisch sicher sein könne, bei unendlicher Wiederholung des Spiels ohne Schaden abzuschneiden. Mathematisch gesprochen wird behauptet, daß (jedenfalls gewöhnlich im Falle $V_n(x) = V(x)$ mit $V(0) = 0$) wenn $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, d\, V_n(x) = +\infty$ ist, für *jede* Zahlenfolge $\{c_n\}$ die Wahrscheinlichkeit der Relation

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - c_k) > 0$$

mit wachsendem n gegen 1 strebt. Daß dies auch rein mathematisch unsinnig ist, wurde an einem speziellen Beispiel u. a. von P. Lévy vorgerechnet[10]). Allgemein kann man nun sagen, daß die oben berechneten Konstanten b_n (vgl. (3)), oder damit im Sinne von (5) äquivalente Konstanten, *immer* im folgenden Sinne die gerechtesten Spieleinsätze sind. Wenn $a_n = n$ gewählt werden kann, so findet mit ihnen ein praktisch sicherer Ausgleich statt (und das kann, auch im Falle $V_n(x) = V(x)$ und bei unendlichem Mittelwert sehr wohl der Fall sein). Andernfalls sind zwar positive Abweichungen praktisch sicher, spielt man jedoch mit irgenwelchen Einsätzen c_n, mit z. B.

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (c_k - b_k) > \alpha > 0,$$

so ist ein beliebig großer Verlust praktisch sicher, d. h. genauer, es strebt dann die Wahrscheinlichkeit der Relation

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - c_k) < -A$$

für jedes positive A mit wachsendem n gegen Eins.

Lund, Februar 1937.

(Eingegangen am 2. März 1937.)

[10]) P. Lévy, a. a. O. [8]), S. 122 ff.

Sur les majorantes harmoniques d'une fonction sousharmonique.

Par OTTO FROSTMAN à Lund.

Soit $f(P)$ une fonction sousharmonique du point P, définie dans un domaine quelconque D de l'espace à m dimensions, $m \geqq 2$. S'il existe des fonctions harmoniques dans ce domaine qui sont $\geqq f(P)$ en tout point P, on peut démontrer l'existence d'une fonction harmonique $H_D(P)$ dans D, telle que $f(P) \leqq H_D(P) \leqq h(P)$ pour toute fonction harmonique $h(P) \geqq f(P)$ dans D. La fonction $H_D(P)$ est appelée par M. F. RIESZ *la plus petite majorante harmonique de $f(P)$ dans D.*[1] Soit encore D' un domaine du type de DIRICHLET intérieur avec sa frontière à D, et supposons que $f_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$, soient une suite de fonctions continues sur la frontière de D', qui tendent en décroissant vers les valeurs de $f(P)$ sur cette même frontière. Les solutions du problème de DIRICHLET dans le domaine D' pour les valeurs frontières successives $f_n(P)$ tendent en décroissant vers une fonction harmonique $H^*_{D'}(P) \geqq f(P)$ dans D' qui s'appelle *la meilleure majorante harmonique de $f(P)$ dans D'.*[2] Évidemment il existe aussi dans le domaine D' une majorante harmonique $H_{D'}(P)$ qui est la plus petite, et l'on a $H_{D'}(P) \leqq H^*_{D'}(P)$. Si la fonction donnée $f(P)$ est continue, il est presque évident que ces deux majorantes sont identiques, mais il est un peu plus difficile de le voir dans le cas

[1]) F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, seconde partie, *Acta Math.*, 54 (1930), p. 321—360, spéc. p. 357.

[2]) F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, première partie, *Acta Math.*, 48 (1926), p. 329—343, spéc. p. 334.

discontinu[3]). Cependant, on peut énoncer le théorème général suivant.

La plus petite majorante harmonique $H_{D'}(P)$ est identique à la meilleure majorante harmonique $H^*_{D'}(P)$ appartenant au même domaine.

En effet, désignons par F la frontière du domaine D', et par μ_P la distribution de masse positive sur F, obtenue par le balayage de la masse unité placée au point intérieur P de D'. La solution du probléme de DIRICHLET dans le domaine D', pour des valeurs continues $g(S)$ données sur F, peut alors être exprimée par l'intégrale

$$\int_F g(S)\,d\mu_P(S),$$

P étant le point variable dans D'. En choisissant successivement $g(S)=f_n(S)$, $n=1, 2, \ldots$, on obtient une suite de fonctions harmoniques tendant vers la meilleure majorante harmonique $H^*_{D'}(P)$ en même temps que $f_n(S)$ tend vers $f(S)$. C'est-à-dire qu'on a

$$H^*_{D'}(P)=\lim_{n\to\infty}\int_F f_n(S)\,d\mu_P(S).$$

Or, la suite $f_n(S)$ étant monotone, on peut faire le passage à la limite sous le signe $\int$, ce qui donne

$$H^*_{D'}(P)=\int_F f(S)\,d\mu_P(S).$$

Rappelons maintenant les théorèmes bien connus de M. F. RIESZ sur la représentation des fonctions sousharmoniques par des potentiels. Supposons pour fixer les idées $m=3$, et soit D'' un second domaine contenu avec sa frontière à D mais contenant D' tout à fait dans son intérieur. Il existe alors dans D'' une distribution de masse négative $-\mu$, telle que

$$f(P)=-\int_{D''}\frac{1}{r_{PQ}}\,d\mu(Q)+h(P),$$

r_{PQ} désignant la distance euclidienne des points P et Q et $h(P)$ étant une fonction harmonique dans D''.[4]) On doit à M. RIESZ

3) *Cf.* M. BRELOT, Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point, *Actualités scientifiques et industrielles*, **139** (Paris, 1934), p. 18.

4) F. RIESZ, loc. cit., *Acta Math.*, **54**, p. 350.

une seconde formule donnant $f(P)$ moyennant la fonction de GREEN. En écrivant cette formule pour le domaine D', on aura[5])

$$f(P) = -\int_{D'} G(P, Q)\, d\mu(Q) + H_{D'}(P),$$

où $G(P, Q)$ est la fonction de GREEN relative au domaine D' et au pôle P. On doit observer que c'est la même distribution $-\mu$ qui entre dans les deux formules écrites, cette distribution étant uniquement déterminée par la fonction donnée $f(P)$. D'ailleurs, on peut dans la dernière formule étendre le domaine d'intégration à embrasser tout le domaine D'', puisque $G(P, Q)$ s'annule identiquement sur la frontière F et en tout point extérieur. En tenant compte de l'expression explicite de la fonction de GREEN,

$$G(P, Q) = \frac{1}{r_{PQ}} - \int_F \frac{1}{r_{QS}}\, d\mu_P(S),$$

on aura donc

$$\begin{aligned} H_{D'}(P) &= f(P) + \int_{D''} G(P, Q)\, d\mu(Q) = \\ &= f(P) + \int_{D''} \frac{1}{r_{PQ}}\, d\mu(Q) - \int_{D''} d\mu(Q) \int_F \frac{1}{r_{QS}}\, d\mu_P(S) = \\ &= h(P) - \int_F d\mu_P(S) \int_{D''} \frac{1}{r_{QS}}\, d\mu(Q). \end{aligned}$$

Or on a aussi, la fonction harmonique $h(P)$ étant continue sur F,

$$h(P) = \int_F h(S)\, d\mu_P(S).$$

D'où il vient immédiatement

$$\begin{aligned} H_{D'}(P) &= \int_F \left\{ h(S) - \int_{D''} \frac{1}{r_{SQ}}\, d\mu(Q) \right\} d\mu_P(S) = \\ &= \int_F f(S)\, d\mu_P(S) = H^*_{D'}(P). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

(Reçu le 4 décembre 1936)

[5]) F. RIESZ, loc. cit., *Acta Math.*, **54**, p. 357.

Sur l'approximation d'une fonction à plusieurs variables.

Par CH. JORDAN à Budapest.

§ 1. Approximation d'une fonction à plusieurs variables indépendantes par la formule de Bravais, selon le principe des moments.

La formule de BRAVAIS[1]) à $s-1$ variables indépendantes est la suivante:

$$(1) \qquad P = Ce^{-\frac{1}{2}\chi^2} \quad \text{où} \quad \chi^2 = 2\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{s-1} a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j.$$

Les quantités ε_i sont les écarts entre les variables x_i et certaines grandeurs M_i, divisés par un nombre ω convenablement choisi:

$$(2) \qquad \varepsilon_i = \frac{1}{\omega}(x_i - M_i).$$

Étant donnée une fonction $\bar{P} = \bar{P}(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})$ à $s-1$ variables indépendantes, il s'agit d'obtenir une approximation en se servant de la formule de BRAVAIS et en adoptant le principe des moments.

On disposera des paramètres C, M_i et a_{ij} contenus dans la formule (1) de manière que les $\binom{s+1}{2}$ premiers moments de la

1) Voir C. JORDAN, Problema delle prove ripetute a più variabili independenti, *Giornale dell'Istituto degli Attuari,* 1933, p. 350—368; C. JORDAN, Inversione della formula di Bernoulli relativa al problema delle prove ripetute a più variabili, *Giornale dell'Istituto dei Attuari,* 1933, p. 505—513; C. JORDAN, Teoria della perequazione e dell'approssimazione, *Giornale dell'Istituto dei Attuari,* 1934, p. 81—107.

fonction $\bar{P}$ soient identiques aux moments respectifs de la fonction (1) de BRAVAIS.

Lorsqu'on dispose des M_i de manière qu'ils soient égaux aux moments du premier ordre de $\bar{P}$ relatifs aux x_i, alors, à la suite de (2), les moments du premier ordre de $\bar{P}$ par rapport aux ε_i seront nuls.

Il faut donc que les moments correspondants de P soient nuls aussi. On verra plus loin que cette condition est satisfaite.

Nous distinguerons deux cas:

A) Les variables x_i de $\bar{P}$ varient d'une manière *continue*. Dans ce cas il n'y a aucune difficulté. Le moment d'ordre zéro sera

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \bar{P}\, dx_1 \ldots dx_{s-1}.$$

Pour simplifier, on suppose $\bar{P}$ multiplié par un facteur convenable pour avoir toujours $M_0 = 1$.

Les moments du premier ordre relatifs aux x_i seront

$$M_i = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i \bar{P}\, dx_1 \ldots dx_{s-1}.$$

Les moments du second ordre de P relatifs aux $x_i x_j$ sont

$$M_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j \bar{P}\, dx_1 \ldots dx_{s-1}.$$

Pour abréger, désignons par μ_{ij} les moments du second ordre de $\bar{P}$ relatifs aux $\varepsilon_i \varepsilon_j$. Comme on a

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \frac{1}{\omega^2} [x_i x_j - x_i M_j - x_j M_i + M_i M_j]$$

on aura

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\omega^2} [M_{ij} - M_i M_j]. \tag{3}$$

Si nous introduisons dans les formules précédentes les variables ε_i (2) au lieu des x_i, nous trouvons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j \bar{P}\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{s-1} = \frac{M_{ij}}{\omega^{s-1}}.$$

Maintenant on peut disposer des $\binom{s}{2}$ constantes a_{ij} contenues dans la formule (1) pour satisfaire aux $\binom{s}{2}$ conditions suivantes

$$(4)\qquad \mu_{ij}=\omega^{s-1}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_i\varepsilon_j P\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_{s-1}.$$

Finalement il faut déterminer C de manière à avoir

$$M_0=\mu_0=\omega^{s-1}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}P\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_{s-1}.$$

B) Lorsque les variables de $\bar{P}$ varient d'une manière discontinue, en prenant des valeurs équidistantes, on peut toujours supposer $\Delta x_i=1$; alors si x_i varie de 0 à N, les moments de $\bar{P}$ seront

$$M_{ij}=\sum_{x_1=0}^{N}\ldots\sum_{x_{s-1}=0}^{N}x_i x_j\bar{P}.$$

Les moments des écarts $(x_i-M_i)/\omega$ seront donnés par la formule (3). En vue de l'approximation par la formule de BRAVAIS, il faudrait déterminer les constantes figurant dans la formule (1) de manière à avoir

$$\mu_{ij}=\sum_{x_1=0}^{N}\ldots\sum_{x_{s-1}=0}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j P$$

c'est-à-dire au lieu des intégrales (4), il faudrait calculer ces sommes multiples. On pourrait les obtenir en déterminant d'abord les intégrales correspondantes, puis déduire les sommes par une formule de sommation d'EULER à plusieurs variables. Finalement on calculera les constantes a_{ij}. Ce serait un procédé compliqué; mais lorsque les limites des ε_i c'est-à-dire $-M_i/\omega$ et $(N-M_i)/\omega$ sont un peu grandes, l'erreur commise en substituant les intégrales aux sommes est négligeable.

Dans le cas particulier de $s=2$, la formule de BRAVAIS se réduit à celle de LAPLACE.

Exemple. Lorsque P est donnée par la formule de LAPLACE et les constantes sont déterminées à l'aide des intégrales (4) on trouve

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_{11}}}e^{-\frac{1}{2}\chi^2},\quad \text{où}\quad \chi^2=(x-M_1)^2/\mu_{11},$$

dans ce cas, si x varie de zéro à $n+1$, la formule de sommation d'EULER sera

$$\sum_{x=0}^{n+1} P(x) = \int_0^{n+1} P(x)dx - \frac{1}{2}[P(n+1) - P(0)] +$$

$$+ \frac{1}{12}[DP(n+1) - DP(0)] - \frac{1}{720}[D^3P(n+1) - D^3P(0)] + \ldots$$

Lorsque $n = 16$, $\mu_{11} = 4$ et $M_1 = 8$, la somme sera égale à 0,9999 8235; d'autre part les termes du second membre seront

$$\begin{array}{rr} + & 0{,}9999\ 6490 \\ + & 2945 \\ - & 1265 \\ + & 70 \\ \hline & 0{,}9999\ 824 \end{array}$$

Le résultat est exact à 7 décimales. Lorsque l'on veut remplacer les limites de l'intégrale par $-\infty$ et ∞, pour obtenir cette précision, il faut que l'on ait $(n+1-M_1)/\sqrt{\mu_{11}}$ et $M_1/\sqrt{\mu_{11}}$ plus grands que 5,3. Lorsque ces quantités sont plus grandes que 5,5 on peut même négliger les termes $P(n+1)$, $P(0)$, $DP(n+1)$ etc.

§ 2. Détermination des constantes a_{ij}, en supposant les erreurs, dues à la substitution des intégrales aux sommes, négligeables.

Remarquons que si i est différent de j, on a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_j \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{s-1} = 0, \tag{5}$$

en effet, en exécutant d'abord l'intégration par rapport à ε_i on obtient P, qui est nul aux deux limites.

D'autre part, de la formule (1) on déduit

$$\varepsilon_j \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} = -2C \sum_{k=1}^{s-1} a_{ik} \varepsilon_j \varepsilon_k e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

finalement l'intégration donne

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_{ik}\mu_{jk} = 0 \qquad \text{lorsque} \qquad i \neq j. \tag{6}$$

Deuxièmement considérons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{s-1}.$$

L'intégration par parties effectuée par rapport à ε_i donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_i = [\varepsilon_i P]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} P\, d\varepsilon_i.$$

Le premier terme du second membre est égal à zéro aux deux limites, donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_i d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{s-1} = -\frac{1}{\omega^{s-1}},$$

d'autre part, de (1) il suit

$$\varepsilon_i \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} = -2C \sum_{k=1}^{s} a_{ik} \varepsilon_i \varepsilon_k e^{-\frac{1}{2}\chi^2}.$$

On en conclut

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_{ik}\, \mu_{ik} = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Les formules (6) et (7) fournissent un système d'équations du premier degré à $s-1$ inconnues déterminant les coefficients a_{ik}. On a explicitement

$$\begin{array}{lllll}
a_{i1}\mu_{11} & + \ldots + & a_{i,s-1}\mu_{1,s-1} & = 0 \\
a_{i1}\mu_{21} & + \ldots + & a_{i,s-1}\mu_{2,s-1} & = 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
a_{i1}\mu_{i1} & + \ldots + & a_{i,s-1}\mu_{i,s-1} & = \frac{1}{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
a_{i1}\mu_{s-1,1} & + \ldots + & a_{i,s-1}\mu_{s-1,s-1} & = 0.
\end{array}$$

Pour résoudre le système, désignons par $\mathfrak{D}_{s-1}$ le déterminant

$$\mathfrak{D}_{s-1} = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \ldots & \mu_{1,s-1} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ \mu_{s-1,1} & \mu_{s-1,2} & \ldots & \mu_{s-1,s-1} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant doit être différent de zéro.

Désignons encore par A_{ij} le mineur de $\mathfrak{D}_{s-1}$ correspondant à μ_{ij}. Alors on aura

$$a_{ij} = \frac{A_{ij}}{2\mathfrak{D}_{s-1}}. \tag{8}$$

Grâce à la symétrie $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ cette formule donne automatiquement $a_{ij} = a_{ji}$.

Les coefficients a_{ij} étant déterminés par la formule (8) en fonction des moments du second ordre μ_{ij}, il reste à montrer que des valeurs a_{ij} obtenues sont telles que les moments du premier ordre s'annulent:

$$\text{(9)} \qquad \frac{1}{\omega^{s-1}}\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_i P\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{s-1} = 0.$$

A cet effet formons le déterminant réciproque de $\mathfrak{D}_{s-1}$:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{i,s-1} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ A_{s-1,1} & A_{s-1,2} & \ldots & A_{s-1,s-1} \end{vmatrix};$$

à l'aide de (8) on obtient pour ce déterminant la valeur:

$$(2\mathfrak{D}_{s-1})^{s-1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,s-1} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{s-1,1} & a_{s-1,2} & \ldots & a_{s-1,s-1} \end{vmatrix}.$$

En désignant le dernier déterminant par D_{s-1}, on a en vertu du théorème connu que le déterminant réciproque de $\mathfrak{D}_{s-1}$ est égal à $(\mathfrak{D}_{s-1})^{s-2}$ la relation

$$D_{s-1} = \frac{1}{2^{s-1}\mathfrak{D}_{s-1}}.$$

D'après ce que l'on a vu, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i}\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{s-1} = 0;$$

mais

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} = -2\,(a_{i1}\varepsilon_1 + a_{i2}\varepsilon_2 + \ldots + a_{i,s-1}\varepsilon_{s-1})\,P$$

par suite, en effectuant les intégrations, on trouve pour toutes les valeurs de i

$$a_{i1}\mu_1 + a_{i2} + \ldots + a_{i,s-1}\mu_{s-1} = 0$$

ce qui donne, pour $i = 1, 2, \ldots, s-1$, les $s-1$ équations déterminant les moments du premier ordre μ_i. Comme le déterminant

$$D_{s-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,s-1} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{s-1,1} & a_{s-1,2} & \ldots & a_{s-1,s-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{s-1}\mathfrak{D}_{s-1}}$$

n'est pas égal à zéro, la seule solution des équations précedentes est $\mu_i = 0$. On en conclut que les équations (9) sont satisfaites.

Remarque. Les valeurs de a_{ij} obtenues à l'aide de la formule (8) doivent être des coefficients d'une forme quadratique positive, sans quoi l'intégrale de la fonction P donnée par (1) deviendrait infinie, ce qui est inadmissible.

M. FEJÉR a appelé l'attention sur le fait que les moments du second ordre d'une fonction positive sont toujours les coefficients d'une forme quadratique positive et qu'il en résulte que les a_{ij} obtenus le sont également. Il le montre ainsi: Considérons μ_{ij} correspondant à la formule (4) où $P \geqq 0$; soient b_{ij} des nombres tels que l'on ait pour toutes les valeurs des ε_i

$$\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-1} b_{ik} \varepsilon_i \varepsilon_j \geqq 0;$$

de (4) il suit (en multipliant par b_{ij}, intégrant et sommant)

$$\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-1} \mu_{ij} b_{ij} \geqq 0.$$

Dans le cas particulier de $b_{ij} = \lambda_i \lambda_j$ on a bien

$$\Sigma\Sigma\, \varepsilon_i \varepsilon_j \lambda_i \lambda_j = (\Sigma \lambda_i \varepsilon_i)^2 \geqq 0$$

donc

$$\Sigma\Sigma\, \mu_{ij} \lambda_i \lambda_j \geqq 0$$

quelles que soient les valeurs de λ_i. Par suite la forme quadratique dont les coefficients sont les nombres μ_{ij} est définie et positive. En posant $\lambda_i = 1$ on trouve l'inégalité

$$\Sigma\Sigma\, \mu_{ij} \geqq 0.$$

La forme $\Sigma\Sigma\, \mu_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j$ étant définie et positive, il en résulte que sa forme polaire $\Sigma\Sigma\, A_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j$ l'est aussi. Mais d'après (8) on a $A_{ij} = 2 a_{ij} \mathfrak{D}_{s-1}$; de plus, comme $\mathfrak{D}_{s-1}$ est le discriminant de la forme quadratique $\Sigma\Sigma\, \mu_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j$ définie positive, il résulte que $\mathfrak{D}_{s-1}$ est positive. Finalement on conclut que la forme

$$\Sigma\Sigma\, a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j$$

est aussi une forme définie positive. C. Q. F. D.

§ 3. Détermination de la constante C. On peut ramener la forme quadratique figurant dans

$$C e^{-\Sigma\Sigma a_{ik} \varepsilon_i \varepsilon_k}$$

par une transformation orthogonale à $\Sigma\lambda_i X_i^2$, le déterminant fonctionnel de la transformation étant égal à ± 1.

On sait que les coefficients λ_i figurant dans cette transformation sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,s-1} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \ldots & a_{2,s-1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \ldots & a_{3,s-1} \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_{s-1,1} & a_{s-1,2} & a_{s-1,3} & \ldots & a_{s-1,s-1}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas général, il serait difficile de déterminer ces racines, mais comme on verra plus loin nous n'avons besoin que de connaître le produit des racines, qui est égal au terme constant de l'équation précédente. On l'obtient donc en y écrivant $\lambda = 0$. Donc

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{s-1} = D_{s-1}.$$

Grâce à la transformation mentionnée, on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} P d\varepsilon_1\ldots d\varepsilon_{s-1} =$$

$$= C\prod_{i=1}^{s-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i X_i^2} dX_i = C\prod_{i=1}^{s-1}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \frac{1}{\omega^{s-1}}.$$

On en conclut

$$C = \frac{1}{\omega^{s-1}}\sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{s-1}}{\pi^{s-1}}} = \frac{1}{\omega^{s-1}}\sqrt{\frac{D_{s-1}}{\pi^{s-1}}}. \tag{10}$$

La formule (1) se trouve ainsi complètement déterminée.

§ 4. Probabilité des systèmes correspondant à $\chi^2 < \lambda^2$. Lorsque la fonction $\bar{P}$ dont on a obtenu l'approximation par la formule de Bravais représente la probabilité du système de valeurs $x_1, x_0, \ldots, x_{s-1}$ ou celle des écarts $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{s-1}$, alors d'après (1), la formule de Bravais fait correspóndre à chaque système de variables une certaine valeur de χ^2; et elle montre que les systèmes de variables correspondant à une même valeur de χ^2 sont également probables.

On peut faire correspondre à chaque système un point de l'espace à $s-1$ dimensions (de coordonnées $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{s-1}$). Les points correspondant à des systèmes également probables sont situés sur l'hyperellipsoïde d'égale probabilité

$$2\Sigma\Sigma a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = \chi^2.$$

La formule (1) permet encore de déterminer la probabilité d'un système d'écarts plus probable que celui correspondant à $\chi^2=\lambda^2$; il suffit de faire la somme des probabilités des systèmes correspondant à $\chi^2<\lambda^2$. Les points correspondant à ces systèmes sont à l'intérieur de l'hyperellipsoïde

$$2\Sigma\Sigma a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j=\lambda^2.$$

Pour déterminer cette probabilité, remarquons que la probabilité pour que le point tombe dans la couche entre les deux ellipsoïdes correspondant à χ et $\chi+d\chi$, est proportionnelle à P donnée par la formule (1), et au volume de la couche. Ce volume est à son tour proportionnel à $\chi^{s-2}d\chi$ car l'une des surfaces se déduit de l'autre par similitude et que l'aire de l'ellipsoïde est proportionnelle à χ^{s-2}. Donc la probabilité en question est

$$\omega_1\chi^{s-2}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}d\chi$$

et la probabilité totale cherchée sera

$$\mathfrak{P}=\omega_1\int\limits_0^\lambda \chi^{s-2}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}d\chi.$$

Pour déterminer ω_1, il suffit de remarquer que pour $\lambda=\infty$ on doit avoir $\mathfrak{P}=1$, par suite

$$\mathfrak{P}=\frac{\int\limits_0^\lambda \chi^{s-2}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}d\chi}{\int\limits_0^\infty \chi^{s-1}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}d\chi}.$$

Introduisons maintenant $t=\frac{1}{2}\chi^2$; on trouve

$$\mathfrak{P}=\frac{\int\limits_0^{1/2\lambda^2} t^{\frac{1}{2}(s-3)}e^{-t}dt}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}=I(\bar{u},\bar{p}) \tag{11}$$

où

$$\bar{p}=\frac{s-3}{2}\quad\text{et}\quad\bar{u}=\frac{\lambda^2}{\sqrt{2s-2}}$$

et $I(\bar{u},\bar{p})$ est la fonction gamma-incomplète (voir par exemple K. Pearson, *Tables of the Incomplete Γ-function*, London, 1922).

La surface correspondante à

$$I(\bar{u},\bar{p})=\frac{1}{2}$$

est la surface probable. La probabilité pour que le point correspondant à un système de variables $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{s-1}$ soit à l'intérieur de cette surface est égale à une demie.

Lorsque $p > 0$, l'équation précédente est vérifiée d'une manière approchée par $\bar{u} = \sqrt{p + \frac{1}{2}}$.

En désignant par ϱ le rayon de l'hypersphère probable on aura pour $s > 2$

$$\sqrt{\frac{1}{2}s - 1} = \frac{\varrho^2}{\sqrt{2s-2}} \quad \text{d'ou} \quad \varrho^2 = \sqrt{(s-1)(s-2)}.$$

Par suite l'équation de l'hypersurface est donnée par

$$\chi^2 = \sqrt{(s-1)(s-2)}.$$

Remarque. En posant dans la formule (11) $s = 2$, on obtient celle qui correspond à une variable indépendente. On trouve que la probabilité pour avoir $\chi^2 < \lambda^2$ est

$$\mathfrak{P} = I\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{2}}, \; -\frac{1}{2}\right).$$

Comme dans ce cas, la formule de Bravais se réduit à celle de Laplace, on en conclut que les valeurs correspondant à cette formule sont aussi données par les tables de la fonction gamma-incomplète.

§ 5. **Cas particulier remarquable.** Dans plusieurs problèmes de probabilités on trouve que les moments de la fonction positive P des écarts sont de la forme suivante

$$\mu_{ii} = \gamma u_i(1 - u_i) \quad \text{et si} \quad i \neq j, \quad \mu_{ij} = -\gamma u_i u_j \quad (\gamma > 0),$$

comme on a nécessairement $\mu_{ii} > 0$ on doit avoir $0 < u_i < 1$; de plus nous avons vu au § 2 que l'on doit avoir $\Sigma\Sigma\mu_{ij} \geqq 0$. On peut écrire cette somme de la manière suivante

$$\gamma \Sigma\Sigma u_i(1 - u_i - u_j) \geqq 0.$$

Ici dans la sommation relative à j on doit avoir $j \neq i$; on en conclut que la somme précédente est égale à

$$\gamma(1 - u_1 - u_2 - \ldots - u_{s-1})\, \Sigma u_i \geqq 0$$

par suite on doit avoir aussi

$$\sum_{i=1}^{s-1} u_i < 1.$$

Dans ce cas, les formules se simplifient considérablement; en effet $\mathfrak{D}_{s-1}$ devient

$$\mathfrak{D}_{s-1} = u_1 \dots u_{s-1} \gamma^{s-1} \begin{vmatrix} 1-u_1 & -u_2 & \dots & -u_{s-1} \\ -u_1 & 1-u_2 & \dots & -u_{s-1} \\ \dots & \dots & & \dots \\ -u_1 & -u_2 & \dots & 1-u_{s-1} \end{vmatrix}.$$

L'évaluation de ce déterminant est simple. En retranchant de chaque ligne la ligne suivante on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & \dots & -u_{s-2} & 1-u_{s-1} \end{vmatrix}.$$

En ajoutant chaque colonne à la dernière on a

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & \dots & -u_{s-2} & u_s \end{vmatrix}$$

où nous avons écrit $1-u_1-u_2-\dots-u_{s-1}=u_s$. D'après ce qui précède on aura $u_s>0$. Finalement on trouve

$$\mathfrak{D}_{s-1} = u_1 u_2 \dots u_s \gamma^{s-1}.$$

D'après la formule (10) la constante C sera égale à

$$C = \frac{1}{\omega^{s-1}\sqrt{(2\pi\gamma)^{s-1} u_1 u_2 \dots u_s}}. \tag{12}$$

Pour obtenir le mineur A_{ii} remarquons que cette quantité est égale au déterminant $(\mu_{11}\mu_{22}\dots\mu_{s-1,s-1})$ dans lequel on a supprimé la ligne et la colonne i. On aura donc

$$A_{ii} = \frac{u_1 \dots u_{s-1}}{u_i} \gamma^{s-2} \begin{vmatrix} 1-u_1 & -u_2 & \dots & -u_{s-1} \\ -u_1 & 1-u_2 & \dots & -u_{s-1} \\ \dots & \dots & & \dots \\ -u_1 & -u_2 & \dots & 1-u_{s-1} \end{vmatrix}.$$

En procédant comme ci-dessus, on trouve

$$A_{ii} = \frac{u_1 \dots u_{s-1}}{u_i} \gamma^{s-2} (u_i + u_s),$$

on en conclut d'après la formule (8)

$$a_{ii} = \frac{(u_i + u_s)}{2\gamma u_i u_s}. \tag{13}$$

Comme A_{ij} est égal au déterminant obtenu de $(\mu_{11} \dots \mu_{s-1,\, s-1})$ en y supprimant la ligne i et la colonne j, puis en multipliant le résultat par $(-1)^{i+j}$, on aura

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{u_1 \dots u_{s-1}}{u_i} \gamma^{s-2} \begin{vmatrix} 1-u_1 & -u_2 & \dots & -u_{s-1} \\ \dots & \dots & & \dots \\ -u_1 & -u_2 & \dots & 1-u_{s-1} \end{vmatrix}.$$

La ligne i étant supprimée dans le déterminant du second membre, il suit que la colonne i ne contient que des nombres $-u_i$. En plaçant cette colonne à la fin, et en retranchant de chaque ligne la suivante, on trouve

$$A_{ij} = (-1)^{i+j+s-1-i-1} \frac{u_1 \dots u_{s-1}}{u_i} \gamma^{s-2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & \dots & -u_{s-2} & 1-u_{s-1} & -u_i \end{vmatrix}.$$

Le déterminant du second membre est égal à $(-1)^{s-1-j+1} u_i$, en effet les nombres dans la diagonale sont négatifs depuis la colonne j. Finalement on a

$$A_{ij} = u_1 u_2 \dots u_{s-1} \gamma^{s-2}.$$

De la formule (8) il suit

$$a_{ij} = \frac{1}{2\gamma u_s} \qquad \text{lorsque} \qquad i \neq j. \tag{14}$$

On en conclut que dans le cas particulier considéré les coefficients a_{ij} sont indépendants de i et de j. C'est une grande simplification, car dans ce cas la forme quadratique figurant dans la formule (1) peut être écrite de la manière suivante

$$\sum \sum a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{i=1}^{s-1} \frac{u_i + u_s}{2\gamma u_i u_s} \varepsilon_i^2 + \frac{1}{2\gamma u_s} \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-1} \varepsilon_i \varepsilon_j;$$

dans la seconde somme i doit être différente de j. Introduisons

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots - \varepsilon_{s-1},$$

on en tire

$$\Sigma\Sigma\varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_s^2 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \ldots - \varepsilon_{s-1}^2.$$

A l'aide de cette valeur, la forme quadratique considérée devient

$$\sum_{i=1}^{s-1}\left[\frac{u_i+u_s}{2\gamma u_i u_s} - \frac{1}{2\gamma u_s}\right]\varepsilon_i^2 + \frac{\varepsilon_s^2}{2\gamma u_s};$$

en simplifiant on trouve

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s}\frac{\varepsilon_i^2}{\gamma u_i}. \tag{15}$$

Dans les paragraphes suivants nous allons donner quelques exemples.

§ 6. Application à la formule de Bernoulli à $s-1$ **variables indépendantes.** Soit

$$\bar{P} = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_s!}\,p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_s^{x_s}; \tag{16}$$

il s'agit de déterminer la formule approchée de $\bar{P}$ à l'aide de la formule (1). Pour commencer il faut déterminer les moments de $\bar{P}$ relatifs aux variables x_i; on y arrive à l'aide de la fonction génératrice de $\bar{P}$. Cette fonction est évidemment

$$U(t_1, t_2, \ldots, t_{s-1}) = (p_1t_1 + p_2t_2 + \ldots + p_{s-1}t_{s-1} + p_s)^n. \tag{17}$$

En effet dans le développement de U, le coefficient de $t_1^{x_1}t_2^{x_2}\ldots t_{s-1}^{x_{s-1}}$ est égale à $\bar{P}$.

On sait que

$$M_i = \Sigma x_i\bar{P} = \left[\frac{\partial U}{\partial t_i}\right]_{t_1=t_2=\ldots=1}.$$

De (17) on tire $M_i = np_i$. Nous pouvons maintenant definir les écarts par

$$\varepsilon_i = \frac{x_i}{n} - p_i.$$

(Ici on a posé $\omega = n$.)

De plus on a

$$M_{ij} = \Sigma x_i x_j\bar{P} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t_i\,\partial t_j}\right]_{t_1=t_2=\ldots=1}$$

et

$$M_{ii} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t_i^2} + \frac{\partial U}{\partial t_i}\right]_{t_1=t_2=\ldots=1}.$$

La formule (17) donne

$$M_{ij}=n(n-1)p_ip_j \quad \text{et} \quad M_{ii}=n(n-1)p_i^2+np_i.$$

Finalement les moments des écarts ε_i sont tirés de la formule (3)

$$\mu_{ij}=\frac{1}{\omega^2}[M_{ij}-M_iM_j]=-\frac{1}{n}p_ip_j,$$

$$\mu_{ii}=\frac{1}{\omega^2}[M_{ii}-M_{ii}^2]=\frac{1}{n}p_i(1-p_i).$$

On voit que μ_{ii} et μ_{ij} sont de la forme $\gamma u_i(1-u_i)$ et $-\gamma u_iu_j$; on peut donc employer les formules du cas particulier considéré au § 5. En posant $u_i=p_i$ et $\gamma=1/n$ on obtient

$$C=\frac{1-}{\sqrt{(2\pi n)^{s-1}p_1p_2\dots p_s}}$$

et

$$\chi^2=n\sum_{i=1}^{s}\frac{\varepsilon_i^2}{p_i}.$$

Ainsi la formule approchée est complètement déterminée.

§ 7. Application à l'Inversion du Théorème de Bernoulli à $s-1$ variables indépendantes. Lorsque les probabilités p_i figurant dans la formule (16) sont inconnues, et qu'on a obtenu en n épreuves les fréquences $x_1, x_2, \dots, x_s$, on cherche à déterminer la probabilité du système de valeurs $p_1, p_2, \dots, p_s$, c'est-à-dire la probabilité pour que les probabilités des événements simples soient respectivement comprises entre $p_i \pm \frac{1}{2}\,dp_i$. Désignons cette probabilité par $\mathfrak{F}\,dp_1dp_2\dots dp_s$.

Il faut remarquer qu'il est impossible de résoudre ce problème sans avoir recours à certaines hypothèses concernant les probabilités à priori du système $p_1, p_2, \dots, p_s$.

On procédera de la manière suivante: En supposant que les valeurs de $p_1, p_2, \dots, p_s$ étaient connues, on détermine à l'aide de (16) la probabilité de l'événement réellement observé $(x_1, x_2, \dots, x_s)$. Plus cette probabilité est grande, plus on considère le système $p_1, p_2, \dots, p_s$ comme probable. A défaut d'autres indications concernant ces probabilités, on admettra que $\mathfrak{F}$ est simplement proportionnel à (16). C'est équivalent au théorème de Bayes combiné avec l'hypothèse de Poisson d'après laquelle tous les systèmes sont également probables à priori.

On aura donc

$$\overline{\mathfrak{P}}dp_1dp_2\ldots dp_{s-1} = \lambda_1 \overline{P}\,dp_1\ldots dp_{s-1} = \lambda p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_s^{x_s}\,dp_1\ldots dp_{s-1}.$$

En vue de la détermination du facteur λ, observons que l'on doit avoir

$$(18)\qquad \int_0^1\ldots\int_0^1 \overline{\mathfrak{P}}\,dp_1\ldots dp_{s-1} = 1\,;$$

on en tire

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^1\ldots\int_0^1 p_1^{x_1}\ldots p_{s-1}^{x_{s-1}}(1-p_1-\ldots-p_{s-1})^{x_s}dp_1\ldots dp_{s-1}$$

mais l'intégrale du second membre est l'intégrale de DIRICHLET, qui est égale à

$$\frac{\Gamma(x_1+1)\ldots\Gamma(x_s+1)}{\Gamma(n+s)} = \frac{x_1!\ldots x_s!}{(n+s-1)!}.$$

La probabilité $\overline{\mathfrak{P}}$ peut donc s'écrire

$$(19)\qquad \overline{\mathfrak{P}}dp_1\ldots dp_{s-1} = \frac{(n+s-1)!}{x_1!\ldots x_s!}\,p_1^{x_1}\ldots p_s^{x_s}\,dp_1\ldots dp_{s-1}.$$

C'est la probabilité pour que les probabilités inconnues soient respectivement comprises dans les limites $p_i \pm \frac{1}{2}dp_i$.

Pour obtenir la formule approchée, il faut tout d'abord déterminer les moments de $\overline{\mathfrak{P}}$ relatifs aux p_i. On aura

$$M_i = \int_0^\infty\ldots\int_0^\infty p_i\overline{\mathfrak{P}}dp_1dp_2\ldots dp_{s-1}\,;$$

on peut mettre cette expression sous la forme

$$M_i = \frac{x_i+1}{n+s}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\frac{(n+s)!}{x_1!\ldots(x_i+1)!\ldots x_s!}\,p_1^{x_1}\ldots p_i^{x_i+1}\ldots p_s^{x_s}dp_1\ldots dp_{s-1}.$$

De (18) et de (19) il suit que l'intégrale multiple précédente est égale à l'unité, et l'on a

$$M_i = \frac{x_i+1}{n+s}$$

Nous définirons les écarts par

$$\varepsilon_i = p_i - \frac{x_i+1}{n+s}.$$

(Ici nous avons posé $\omega = 1$.)

On déterminera de la même manière

$$M_{ij} = \frac{(x_i+1)(x_j+1)}{(n+s)(n+s+1)}, \qquad M_{ii} = \frac{(x_i+1)(x_i+2)}{(n+s)(n+s+1)}$$

ce qui donne pour les moments des écarts

$$\mu_{ii} = M_{ii} - M_i^2 = \frac{(x_i+1)(n+s-x_i-1)}{(n+s)^2(n+s+1)}$$

et

$$\mu_{ij} = M_{ij} - M_i M_j = -\frac{(x_i+1)(x_j+1)}{(n+s)^2(n+s+1)}.$$

On voit que ces moments rentrent dans le cas particulier du § 5. Pour obtenir la formule approchée, il suffit donc de poser dans les formules de ce paragraphe

$$u_i = \frac{x_i+1}{n+s} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{n+s+1}.$$

On en conclut que pour avoir la valeur approchée de la probabilité $\overline{\mathcal{P}}$, il suffit de poser dans la formule

$$\mathcal{P} = Ce^{-\chi^2} dp_1 \ldots dp_{s-1}$$

les valeurs suivantes

$$C = \sqrt{\frac{(n+s+1)^{s-1}(n+s)^s}{(2\pi)^{s-1}(x_1+1)\ldots(x_s+1)}}$$

et

$$\chi^2 = (n+s+1)(n+s)\sum_{i=1}^{s} \frac{\varepsilon_i^2}{x_i+1}.$$

§ 8. Application aux probabilités hypergéométriques. Une urne contient m boules marquées $1, 2, \ldots, s$, le nombre des boules marquées i étant b_i; on tire de l'urne à la fois n boules et on demande la probabilité pour que parmi les boules tirées il y ait x_1 boules marquées 1, x_2 marquées 2, et ainsi de suite x_s marquées s. On a

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_s = m \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_s = n$$

et la probabilité cherchée est

$$\overline{P} = \frac{\binom{b_1}{x_1}\binom{b_2}{x_2}\cdots\binom{b_s}{x_s}}{\binom{m}{n}}. \tag{20}$$

On a montré ailleurs que la fonction génératrice de cette probabilité est une fonction hypergéométrique à $s-1$ variables, ce qui a permis de déterminer les moments de $\overline{P}$.[2]) On a

$$M_i = \Sigma \ldots \Sigma x_i \overline{P} = \frac{n b_i}{m}.$$

On définira les écarts par $(\omega = n)$

$$\varepsilon_i = \frac{x_i}{n} - \frac{b_i}{m}.$$

De plus on a

$$M_{ii} = \Sigma \ldots \Sigma x_i^2 \overline{P} = \frac{n(n-1)}{m(m-1)} b_i(b_i - 1) + \frac{n b_i}{m},$$

$$M_{ij} = \Sigma \ldots \Sigma x_i x_j \overline{P} = \frac{n(n-1)}{m(m-1)} b_i b_j.$$

De ces valeurs, on déduit

$$\mu_{ii} = \Sigma \ldots \Sigma \varepsilon_i^2 \overline{P} = \frac{1}{n^2}(M_{ii} - M_i^2) = \frac{(m-n)\, b_i (m - b_i)}{n(m-1)\, m^2},$$

$$\mu_{ij} = \Sigma \ldots \Sigma \varepsilon_i \varepsilon_j \overline{P} = \frac{1}{n^2}(M_{ij} - M_i M_j) = -\frac{(m-n)\, b_i b_j}{n(m-1)\, m^2}.$$

On constate que ce problème rentre aussi dans la catégorie des problèmes du § 6, et pour obtenir l'approximation par la formule (1), il suffit de poser dans les formules du paragraphe 6

$$u_i = \frac{b_i}{m} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{(m-n)}{n(m-1)};$$

il en résulte

$$C = \sqrt{\left[\frac{m(m-1)}{2\pi n(m-n)}\right]^{s-1} \frac{m}{b_1 b_2 \ldots b_s}},$$

$$\chi^2 = \frac{n m(m-1)}{m-n} \sum_{i=1}^{s} \frac{\varepsilon_i^2}{b_i}.$$

§ 9. Application à l'inversion de la formule (20). D'une urne contenant m boules marquées $1, 2, \ldots, s$, dans des proportions inconnues, on a tiré n boules et on a trouvé x_i boules marquées i, pour $i = 1, 2, 3, \ldots, s$;

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_s = n.$$

On demande la probabilité $\overline{\mathscr{P}}$ pour qu'il y ait eu dans l'urne avant le tirage b_i boules marquées i pour $i = 1, 2, \ldots, s$ avec

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_s = m.$$

---

[2]) Ch. Jordan, Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées, *ces Acta,* **3** (1926), pp. 193—210.

Il est évident que pour pouvoir résoudre ce problème il faut avoir recours à une hypothèse. Si les nombres inconnus étaient égaux à $b_1, b_2, \ldots, b_s$, la probabilité d'obtenir le résultat réellement observé serait donné par la formule (20); plus cette probabilité est grande, plus le système $b_1, b_2, \ldots, b_s$ est probable. Lorsque nous n'avons aucune indication concernant la probabilité $\overline{\mathfrak{P}}$, nous admettrons qu'elle est simplement proportionnelle à la probabilité (20) (c'est, comme nous avons remarqué équivalent au théorème de Bayes combiné avec l'hypothèse de Poisson):

$$\overline{\mathfrak{P}}(b_1, \ldots, b_s) = \lambda \binom{b_1}{x_1}\binom{b_2}{x_2} \cdots \binom{b_s}{x_s}.$$

Pour déterminer λ, remarquons que l'on doit avoir $\Sigma \ldots \Sigma \overline{\mathfrak{P}} = 1$, il en résulte

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{b_1} \cdots \sum_{b_{s-1}} \binom{b_1}{x_1} \cdots \binom{b_s}{x_s} = \binom{m+s-1}{n+s-1}.$$

Par suite

$$\overline{\mathfrak{P}}(b_1, b_2, \ldots, b_s) = \frac{\binom{b_1}{x_1} \cdots \binom{b_s}{x_s}}{\binom{m+s-1}{n+s-1}}.$$

Pour déterminer les moments de $\overline{\mathfrak{P}}$ relatif à b_i, écrivons

$$M_i = \Sigma \ldots \Sigma b_i \overline{\mathfrak{P}} =$$

$$= \frac{(x_i+1)(m+s)}{n+s} \sum \cdots \sum \frac{\binom{b_1}{x_1} \cdots \binom{b_i+1}{x_i+1} \cdots \binom{b_s}{x_s}}{\binom{m+s}{n+s}} - \Sigma \ldots \Sigma \overline{\mathfrak{P}}$$

ce qui donne

$$M_i = \frac{(x_i+1)(m+s)}{n+s} - 1.$$

Définissons maintenant les écarts par

$$\varepsilon_i = \frac{1}{m}\left[b_i - \frac{(x_i+1)(m+s)}{n+s} + 1\right]$$

(ici nous avons posé $\omega = m$).

Les autres moments sont déduits de la même manière, et on trouve pour $i \neq j$

$$M_{ij} = \Sigma \ldots \Sigma b_i b_j \overline{\mathfrak{P}} = \Sigma \ldots \Sigma [(b_i+1)(b_j+1)\overline{\mathfrak{P}} - b_i\overline{\mathfrak{P}} - b_j\overline{\mathfrak{P}} - \overline{\mathfrak{P}}]$$

ce qui donne pour $i \neq j$

$$M_{ij} = \frac{(m+s)(m+s+1)(x_i+1)(x_j+1)}{(n+s)(n+s+1)} - M_i - M_j - 1$$

de plus on a

$$M_{ii} = \Sigma \ldots \Sigma b_i^2 \mathfrak{P} = \Sigma \ldots \Sigma [(b_i+1)(b_i+2)\mathfrak{P} - 3(b_i+1)\mathfrak{P} + \mathfrak{P}];$$

c'est-à-dire

$$M_{ii} = \frac{(m+s)(m+s+1)(x_i+1)(x_i+2)}{(n+s)(n+s+1)} - \frac{3(x_i+1)(m+s)}{n+s} + 1.$$

De ces valeurs on déduit pour $i \neq j$

$$\mu_{ij} = \frac{M_{ij} - M_i M_j}{m^2} = -\frac{(m+s)(m-n)(x_i+1)(x_j+1)}{m^2(n+s+1)(n+s)^2},$$

de même

$$\mu_{ii} = \frac{M_{ii} - M_i^2}{m^2} = \frac{(m+s)(m-n)(x_i+1)(n+s-x_i-1)}{m^2(n+s+1)(n+s)^2}.$$

Pour obtenir la formule approchée (1), remarquons que ces moments rentrent dans le cas particulier traité au § 5, on posera donc dans les formules de ce paragraphe

$$u_i = \frac{x_i+1}{n+s} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{(m+s)(m-n)}{(n+s+1)m^2};$$

on trouvera alors

$$C = \sqrt{\left[\frac{(n+s+1)}{2\pi(m+s)(m-n)}\right]^{s-1} \frac{(n+s)^s}{(x_1+1)\ldots(x_s+1)}}$$

et

$$\chi^2 = \frac{(n+s)(n+s+1)m^2}{(m+s)(m-n)} \sum_{i=1}^{s} \frac{\varepsilon_i^2}{x_i+1}.$$

§ 10. Application à l'inversion de la formule (20) dans le cas de l'hypothèse de Boole. Même problème qu'au paragraphe précédent, mais nous avons des raisons pour supposer que les m boules placées dans l'urne en question ont été tirées d'une autre urne contenant une infinité de boules marquées $1, 2, \ldots, s$; la probabilité de tirer de cette urne une boule marquée i étant égale à $1/s$ pour toutes les valeurs de i.

Alors l'égalité des fréquences est la plus probable, et la probabilité a priori du système $b_1, b_2, \ldots, b_s$ est

$$\frac{m!}{b_1!\, b_2! \ldots b_s!} \frac{1}{s^m}.$$

C'est dans ce cas que les statisticiens disent que les urnes possibles sont distribuées normalement.

Dans l'hypothèse de BOOLE, on supposera après le tirage des n boules, que la probabilité $\overline{\mathfrak{P}}$ du système $b_1, b_2, \dots, b_s$ est proportionnelle d'une part à l'expression précedente et d'autre part à la probabilité (20). On peut donc écrire

$$\overline{\mathfrak{P}} = \frac{\lambda_1}{b_1! \dots b_s!} \binom{b_1}{x_1} \dots \binom{b_s}{x_s}.$$

Pour déterminer la constante λ_1 et les moments de la fonction, notons que la fonction génératrice de $\overline{\mathfrak{P}}$ est évidemment égale à

$$U = \frac{\lambda_1}{x_1! \dots x_s! \, (m-n)!} (1 + t_1 + t_2 + \dots + t_{s-1})^{m-n} t_1^{x_1} t_2^{x_2} \dots t_{s-1}^{x_{s-1}};$$

en effet, dans le développement de U le coefficient de $t_1^{b_1} \dots t_{s-1}^{b_{s-1}}$ est égal à $\overline{\mathfrak{P}}$.

Comme on doit avoir $[U]_{t_1=t_2=\dots=1} = 1$ il s'ensuit

$$\lambda_1 = \frac{(m-n)!}{s^{m-n}} x_1! \dots x_s!$$

et

$$\overline{\mathfrak{P}} = \frac{(m-n)!}{(b_1-x_1)! \, (b_2-x_2)! \dots (b_s-x_s)! \, s^{m-n}}.$$

On obtiendra les moments

$$M_i = \left[\frac{\partial U}{\partial t_i}\right]_{t_1=t_2=\dots=1} = \frac{m-n}{s} + x_i.$$

Définissons les écarts par

$$\varepsilon_i = \frac{b_i}{m} - \frac{m-n}{ms} - \frac{x_i}{m}$$

(où l'on a posé $\omega = m$). On aura

$$M_{ii} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t_i^2} + \frac{\partial U}{\partial t_i}\right]_{t_1=t_2=\dots=1} = \frac{(m-n)(m-n-1)}{s^2} + \\ + \frac{(m-n)(2x_i+1)}{s} + x_i^2$$

et

$$M_{ij} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t_i \partial t_j}\right]_{t_1=t_2=\dots=1} = \frac{(m-n)(m-n-1)}{s^2} + \\ + \frac{(m-n)(x_i+x_j)}{s} + x_i x_j.$$

On en déduit

$$\mu_{ii} = \frac{M_{ii} - M_i^2}{m^2} = \frac{(m-n)(s-1)}{m^2 s^2}$$

et, pour $i \neq j$

$$\mu_{ij} = \frac{M_{ij} - M_i M_j}{m^2} = -\frac{m-n}{m^2 s^2}.$$

Remarquons que μ_{ii} et μ_{ij} sont indépendantes de i et de j, de plus qu'on les obtient en posant dans les formules du § 5

$$u_i = \frac{1}{s} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{m-n}{m^2};$$

on trouve finalement

$$C = \sqrt{\left[\frac{s}{2\pi(m-n)}\right]^{s-1} s}$$

et

$$\chi^2 = \frac{m^2 s}{m-n} \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i^2.$$

(Reçu le 11 septembre 1936)

Über die Primzahlen der arithmetischen Progression.

Von PAUL TURÁN in Budapest.

§ 1.

In den folgenden Zeilen wird stets vorausgesetzt, daß die für $\sigma > 1$ üblicherweise durch

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad (s = \sigma + ti)$$

definierte Dirichletsche Funktion für $\sigma > \frac{1}{2}$ für kein k und χ verschwindet. Diese Annahme bezeichnen wir kurz mit HL, da HARDY und LITTLEWOOD ähnliche Annahmen in ihren Arbeiten über den Goldbachschen Satz benützen. Die zu betrachtende Progression sei $kx+l$ $(x=0, 1, \ldots)$, $(k, l) = 1$, $1 \leqq l \leqq k-1$, die kleinste Primzahl dargestellt von $kx+l$ sei $P(k, l)$, die Anzahl der Primzahlen in $kx+l$ bis N sei $\pi(N, k, l)$, ferner seien $a_1, a_2, \ldots$ von k und l; $b_1, b_2, \ldots$ von N, k, l und endlich $c_1, c_2, \ldots$ von s, N, k, l unabhängige Konstante, $\varphi(k)$ die Eulersche Funktion.

In § 2 beschäftigen wir uns mit der Größenordnung in Bezug auf k von $P(k, l)$. Das Problem wurde meines Wissens zuerst von S. CHOWLA[1]) gestellt; es handelt sich offenbar lediglich um die Abhängigkeit von k des Restgliedes im Primzahlsatz für die arithmetische Progression. Aus der, unter der Annahme HL geltenden Formel von TITCHMARCH[2])

---

[1]) S. CHOWLA, On the Least Prime in the Arithmetical Progression, *Journal Indian Math. Society,* (2) 1 (1934), S. 1—3. Ich kenne diese Arbeit nur aus dem Referat in *Zentralblatt für Math.,* 9 (1934), S. 8.

[2]) E. C. TITCHMARCH, A Divisor Problem, *Rendiconti Palermo,* 54 (1930), S. 414—429.

$$(1) \qquad \left| \pi(N, k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^N \frac{dt}{\log t} \right| < b_1 \sqrt{N} \log N$$

folgt, wie auch CHOWLA bemerkt, daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$(2) \qquad P(k, l) < a_1(\varepsilon)\, \varphi(k)^2 \log^{4+\varepsilon} k$$

ist. Ohne irgendwelche Vermutungen bewies CHOWLA nur $P(k, l) < e^{a_2 k}$. Resultate über das Restglied erhält auch A. PAGE[3]).

CHOWLA vermutet a. a. O. [1]), daß $P(k, l) < a_3 k^{1+\varepsilon}$ ist. Im § 2 beweisen wir, daß unter der Annahme HL diese Vermutung für fast alle Progressionen mod k wahr ist. Genauer: bei festem k und $\delta > 0$ ist die Anzahl derjenigen l, für welche $P(k, l) < \varphi(k) \log^{2+\delta} k$ gilt, asymptotisch gleich $\varphi(k)$ (Satz II). Aus dem Primzahlsatz folgt unmittelbar, daß schon $P(k, l) < \frac{1}{2} \varphi(k) \log k$ nicht mehr für fast alle Progressionen mod k gilt. Wie es mir aber Herr P. ERDŐS freundlicherweise mitteilte, ist die Anzahl derjenigen Progressionen mod k, für welche $P(k, l) < a_4 \varphi(k) \log k$ gilt, größer als $a_5 \varphi(k)$, wo natürlich a_5 von a_4 abhängt. Diesen Satz bewies er ohne irgendwelche Vermutungen mittelst der Brunschen Methode.

Wenn wir auch die gleichmäßige Verteilung der Primzahlen betrachten, erhalten wir — wir benötigen dies in § 3 — daß für $N > \varphi(k) \log^{4+\delta} k$

$$(3) \qquad \pi(N, k, l) > \frac{1-\varepsilon}{\varphi(k)} \frac{N}{\log N} \qquad k > k_0(\varepsilon, \delta)$$

gilt für festes, aber beliebig kleines positives ε und δ und für fast alle l (Satz I). Wir werden nur Satz I beweisen und den Beweis von Satz II nur skizzieren, weil der Beweis von II leichter, aber ähnlich jenem von I ist. Für $N > \varphi(k)^{2+\varepsilon}$ folgt (3) offenbar aus (1).

In § 3 beschäftigen wir uns mit einer älteren Vermutung von P. ERDŐS; diese besagt, daß für ein beliebiges, festes ϑ die Folge $2\vartheta, 3\vartheta, 5\vartheta, \ldots, p\vartheta \ldots$, wo p alle Primzahlen durchläuft, mod 1 gleichverteilt ist. In dem Beweis unterscheiden wir zwei Fälle; der zweite wurde von P. ERDŐS erledigt. Wenn wir nur die Überalldichtigkeit feststellen wollen, verfahren wir folgendermaßen. Für jedes feste ϑ gibt es bekanntlich unendlich viele

[3]) A. PAGE, On the Number of Primes in an Arithmetic Progression, *Proceedings London Math. Society*, (2) 39 (1935), S. 116—141.

$\frac{u_r}{v_r}$ $(r=1,2,\ldots)$ mit $(u_r, v_r)=1$ und $\left|\vartheta-\frac{u_r}{v_r}\right| \leqq \frac{1}{v_r^2}$. Wir betrachten ein bestimmtes $r=n$ und lassen p die Primzahlen $\leqq v_n^{2-\eta}$ durchlaufen $\left(\eta\right.$ positiv, kleiner als $\frac{1}{4}$ und fest gegeben.$\left.\right)$ Es sei $[\alpha, \beta]$ das zu betrachtende Intervall, wobei $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$ ist. Da

$$\left|p\vartheta - p\frac{u_n}{v_n}\right| < \frac{v_n^{2-\eta}}{v_n^2} \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

so genügt es zu zeigen, daß für $p \leqq v_n^{2-\eta}$ im Intervall $[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$, $\varepsilon \leqq \frac{\beta-\alpha}{4}$, für $n > n_0(\varepsilon)$ mindestens ein $p\frac{u_n}{v_n}$ liegt mod 1. In diesem Intervall liegen aber mehr als $\frac{\beta-\alpha}{5}\varphi(v_n)$ Zahlen von der Form $\frac{l}{v_n}$ mit $(l, v_n)=1$; also gibt es mehr als $\frac{\beta-\alpha}{5}\varphi(v_n)$ Zahlen $\nu \leqq v_n$ so, daß für die Primzahlen $p \equiv \nu \pmod{v_n}$ die Zahlen $p\frac{u_n}{v_n}$ im Intervall $[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$ liegen mod 1. Nach Satz II existieren aber unter der Annahme HL in *fast allen* Progressionen mod k Primzahlen z. B. unterhalb $v_n^{3/2}$; also auch gewiß in einem unserer Progressionen $v_n x+\nu$, w. z. b. w. Wie ersichtlich, wäre die Chowlasche Behauptung $P(k, l) < a_6\varphi(k)^{2+\varepsilon}$ auch für die Überalldichtigkeit nicht genügend.

Wir könnten alles unter der schwächeren Annahme: $L(s,\chi) \neq 0$ für $\sigma > \frac{3}{4}$ mit einigen geringen Modifikationen beweisen; doch beschäftigen wir uns damit nicht.

§ 2.

Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz. Unter der Annahme HL ist

$$\sum_{\substack{l \\ (l,k)=1}} \left[\sum_{\substack{n\leqq N \\ n\equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \Lambda(n) - \frac{N}{\varphi(k)}\right]^2 < b_2 N \log^4 kN. \tag{4}$$

Beweis. Bekanntlich ist für $\sigma > 1$

$$\sum_{\substack{n \\ n\equiv l}} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l)\frac{L'}{L}(s,\chi) = f(s). \tag{5}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei N nicht ganz und $[N]+1$ sei keine Primzahlpotenz. Wegen der absoluten Konvergenz gewinnen wir durch gliedweise Integration

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}\frac{(N+1)^s-N^s}{s^2}f(s)\,ds=\sum_{\substack{n<N+1\\ n\equiv l}}\Lambda(n)\log\frac{N+1}{n}-$$
$$-\sum_{\substack{n<N\\ n\equiv l}}\Lambda(n)\log\frac{N}{n}=\sum_{\substack{n<N\\ n\equiv l}}\Lambda(n)\log\left(1+\frac{1}{N}\right),$$

also

$$\sum_{\substack{n<N\\ n\equiv l}}\Lambda(n)=\frac{1}{2\pi i\log\left(1+\frac{1}{N}\right)}\int\limits_{(2)}\frac{(N+1)^s-N^s}{s^2}f(s)\,ds. \tag{6}$$

Wir benötigen einige Ergebnisse über die L-Funktionen diese finden wir bei TITCHMARCH a. a. O. [2]), sie lauten:

Unter der Annahme HL gilt für $\frac{1}{4}\leqq\sigma\leqq 2$, wenn $\varrho=\frac{1}{2}+\gamma i$ die Wurzeln von $L(s,\chi)$ bedeuten,

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)-\sum_{|t-\gamma|\leqq 2}\frac{1}{s-\varrho}\right|<c_1\log k(|t|+2). \tag{7}$$

Unter der Annahme HL ist, wenn $N_\chi(T)$ die Anzahl der Wurzeln von $L(s,\chi)$ im Rechtecke $0,\ 1,\ Ti,\ 1+Ti$ bedeutet ($T\geqq 0$),

$$N_\chi(T+1)-N_\chi(T)<c_2\log k(T+2). \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt leicht, daß es in jedem Intervall $\nu\leqq t<\nu+1$ ein $t=T_\nu$ gibt so, daß für $\frac{1}{4}\leqq\sigma\leqq 2$

$$\left|\frac{L'}{L}(\sigma+T_\nu i)\right|<c_3\log^2(T_\nu+2), \tag{9}$$

ferner für $\sigma=\frac{1}{4}$

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|<c_4\log^2 k(|t|+2) \tag{10}$$

gilt. Durch den Cauchyschen Integralsatz folgt, wegen (9),

$$R_l(N)\equiv\sum_{\substack{n<N\\ n\equiv l}}\Lambda(n)-\frac{1}{\varphi(k)}\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{N}\right)}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i\log\left(1+\frac{1}{N}\right)}\int\limits_{(3/4)}\frac{(N+1)^s-N^s}{s^2}f(s)\,ds, \tag{11}$$

also wegen der absoluten Konvergenz des Integrals

$$R_l(N)^2 = -\frac{1}{4\pi^2 \log^2\left(1+\frac{1}{N}\right)} \int\limits_{(^3/_4)} \int\limits_{(^3/_4)} \frac{(N+1)^{s_1}-N^{s_1}}{s_1^2} \frac{(N+1)^{s_2}-N^{s_2}}{s_2^2} \times$$

$$\times \frac{1}{\varphi(k)^2} \sum_{\chi_1} \sum_{\chi_2} \overline{\chi}_1(l)\overline{\chi}_2(l) \frac{L'}{L}(s_1,\chi_1)\frac{L'}{L}(s_2,\chi_2)\, ds_1\, ds_2. \tag{12}$$

Jetzt summieren wir in Bezug auf l. Auf Grund der bekannten Orthogonalitätseigenschaft der Charaktere ergibt sich dann

$$\sum_{\substack{l \\ (l,k)=1}} R_l(N)^2 = \frac{1}{\varphi(k)} \frac{1}{\log^2\left(1+\frac{1}{N}\right)} \times$$

$$\times \sum_{\chi} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(^3/_4)} \frac{(N+1)^s-N^s}{s^2} \frac{L'}{L}(s,\chi)\, ds\right] \times \tag{13}$$

$$\times \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(^3/_4)} \frac{(N+1)^s-N^s}{s^2} \frac{L'}{L}(s,\overline{\chi})\, ds\right].$$

Es sei

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(^3/_4)} \frac{(N+1)^s-N^s}{s^2} \frac{L'}{L}(s,\chi)\, ds. \tag{14}$$

Wegen (9) ist

$$I = \sum_{\varrho} \frac{(N+1)^\varrho - N^\varrho}{\varrho^2} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(^1/_4)} \frac{(N+1)^s-N^s}{s^2} \frac{L'}{L}(s,\chi)\, ds. \tag{15}$$

Da aber wegen (8)

$$\left|\sum_{\varrho} \frac{(N+1)^\varrho - N^\varrho}{\varrho^2}\right| < \left|\sum_{|\gamma|\leqq N^3}\right| + \left|\sum_{|\gamma|>N^3}\right| <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{|\gamma|\leqq N^3} \frac{1}{|\varrho|} + 2\sqrt{N} \sum_{\gamma > N^3} \frac{1}{|\varrho|^2} < c_5 \frac{\log^2 kN}{\sqrt{N}} \tag{16}$$

und wegen (10)

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(^1/_4)} \frac{(N+1)^\varrho - N^\varrho}{\varrho^2} \frac{L'}{L}(s,\chi)\, ds\right| <$$

$$< \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N^3}^{N^3} \frac{|(N+1)^{^1/_4+ti} - N^{^1/_4+ti}|}{|s|^2} \left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{N^3}^{\infty} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{-N^3} < c_6 \frac{\log^3 kN}{N^{^3/_4}},$$

so folgt, daß

(17) $$|I| < c_7 \frac{\log^2 kN}{\sqrt{N}}.$$

Dies in (13) eingesetzt gelangen wir wegen $(a+b)^2 \leqq 2(a^2+b^2)$ zu

$$\sum_{\substack{l \\ (l,k)=1}} \left[\sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) - \frac{N}{\varphi(k)}\right]^2 <$$

$$< 2 \sum_{\substack{l \\ (l,k)=1}} R_l(N)^2 + \frac{c_8}{\varphi(k)} < c_9 N \log^4 kN,$$

w. z. b. w.

Aus

$$\sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) \log \frac{N}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{N^s}{s^2} f(s)\, ds$$

folgern wir ähnlich, wie oben

(18) $$\sum_{\substack{l \\ (l,k)=1}} \left[\sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) \log \frac{N}{n} - \frac{N}{\varphi(k)}\right]^2 < c_{10} N \log^2 k;$$

dies benötigen wir beim Beweis des Satzes II.

Aus dem Hilfssatz folgt, daß die Anzahl derjenigen Progressionen mod k, für welche

$$\left|\sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) - \frac{N}{\varphi(k)}\right| > \sqrt{\frac{N}{\varphi(k)}} \log^{2+\frac{\delta}{2}} kN$$

gilt, $o(\varphi(k))$ ist. Wenn also $N > \varphi(k) \log^{4+5/2\delta} k$ ist, überwiegt der Hauptteil, daher gilt für fast alle l

$$\sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) > \frac{N}{\varphi(k)} - \sqrt{\frac{N}{\varphi(k)}} \log^{2+\frac{\delta}{2}} kN;$$

für diese l ist also

(19) $$\sum_{\substack{p,\,\alpha \\ p^\alpha \leqq N \\ p^\alpha \equiv l}} 1 > \frac{1}{\log N} \sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) >$$

$$> \frac{1}{\varphi(k)} \frac{N}{\log N} - 10 \sqrt{\frac{N}{\varphi(k)}} \log^{1+\frac{\delta}{2}} N > \frac{1-\varepsilon}{\varphi(k)} \frac{N}{\log N}$$

für $k > a_7(\varepsilon)$. Nun wollen wir aber entsprechendes für

$$\pi(N, k, l) = \sum_{\substack{p \\ p \leqq N \\ p \equiv l}} 1$$

beweisen; wir müssen also diejenigen l weglassen, für welche die in (19) linksstehende Summe „zu viele" $\left(\text{z. B. mehr als } \left(\frac{N}{\varphi(k)}\right)^{2/3}\right)$ p^α mit $\alpha > 1$ enthält. Diese l nennen wir kurz „schlechte l". Die Anzahl derselben ist aber $o(\varphi(k))$. Wenn wir nämlich zuerst $\varphi(k)^{3/2} \geqq N \geqq \varphi(k) \log^{4+5/2\delta} k$ annehmen, so gibt es überhaupt höchstens $2\varphi(k)^{3/4}$ Primzahlpotenzen p^α mit $\alpha > 1$ unterhalb N; diese sind in höchstens $2\varphi(k)^{3/4}$ arithmetischen Progressionen mod k enthalten, also liefern höchstens ebensoviele, folglich $o(\varphi(k))$ schlechte l. Es sei ferner $\varphi(k)^{3/2} \leqq N \leqq \varphi(k)^{7/3}$. Dann ist die Anzahl der fraglichen Primzahlpotenzen p^α mit $\alpha \geqq 1$ unterhalb N nach (19), ganz grob abgeschätzt, größer als $\varphi(k)^{1/3}$ für $k > a_8(\varepsilon)$; also ist die Anzahl D derjenigen Progressionen mod k, welche unterhalb N mehr als $\varphi(k)^{1/3}$ Primzahlpotenzen p^α mit $\alpha > 1$ darstellen, kleiner als $\frac{2\varphi(k)^{7/6}}{\varphi(k)^{1/3}} =$ $= 2\varphi(k)^{5/6} = o(\varphi(k))$ (unterhalb N gibt es ja höchstens $2\sqrt{N}$ Primzahlpotenzen p^α mit $\alpha > 1$). Die Anzahl der schlechten l ist aber offenbar kleiner als D. Endlich besteht für $N > \varphi(k)^{7/3}$, wegen (1), Gleichverteilung in *allen* Progressionen mod k. Damit haben wir bewiesen

Satz I. *Es seien ε und δ beliebig kleine gegebene positive Zahlen und $N = N(k)$ irgendwelche Funktion von k, für welche $N > \varphi(k) \log^{4+\delta} k$ besteht. Dann ist die Anzahl derjenigen Progressionen* mod k, *für welche*

$$\pi(N(k), k, l) > \frac{1-\varepsilon}{\varphi(k)} \frac{N(k)}{\log N(k)}$$

gilt, asymptotisch gleich $\varphi(k)$ für $k \to \infty$.

Wir skizzieren nun kurz, wie man aus (18) zu Satz II gelangt. $N = \varphi(k) \log^{2+\delta} k$ gesetzt, ist

$$\sum_{\substack{l \\ (k,l)=1}} \left\{ \sum_{\substack{n \leqq \varphi(k) \log^{2+\delta} k \\ n \equiv l}} \Lambda(n) \log \frac{\varphi(k) \log^{2+\delta} k}{n} - \log^{2+\delta} k \right\}^2 <$$
$$< c_{10} \varphi(k) \log^{4+\delta} k,$$

also gilt für fast ~~alle~~ l und $k > k_1(\delta)$

$$\left| \sum_{\substack{n \leqq \varphi(k) \log^{2+\delta} k \\ n \equiv l}} \Lambda(n) \log \frac{\varphi(k) \log^{2+\delta} k}{n} - \log^{2+\delta} k \right| < \log^{2+\frac{2}{3}\delta} k.$$

Für diese l kann also die Summe in (20) nicht leer sein. Zwar können auch hier „schlechte l" auftreten; die Anzahl derselben ist aber, wie oben, kleiner als $2\sqrt{\varphi(k)} \log^{1+\frac{\delta}{2}} k = o(\varphi(k))$; also gilt

Satz II. *Es sei δ eine gegebene, beliebig kleine positive Zahl. Dann ist die Anzahl derjenigen arithmetischen Progressionen* mod k, *für welche*

$$P(k, l) < \varphi(k) \log^{2+\delta} k$$

gilt, asymptotisch gleich $\varphi(k)$ für $k \to \infty$.

§ 3.

Wir beweisen nun unter der Annahme HL, daß *für jedes feste ϑ die Folge $2\vartheta, 3\vartheta, 5\vartheta, \ldots, p\vartheta \ldots$* mod 1 *gleichverteilt ist.*

Wir betrachten das Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < b < 1$; es sei $\varepsilon < \min\left(\frac{a}{2}, \frac{1-b}{2}\right)$, sonst beliebig klein. Dann werden wir beweisen, daß

$$S(\vartheta, N, a, b) = \sum_{\substack{a \leqq p\vartheta \leqq b \,(\mathrm{mod}\, 1) \\ p \leqq N}} 1$$

gesetzt, für $N > n_1(\varepsilon)$

$$(b - a - 4\varepsilon)(1 - \varepsilon) \frac{N}{\log N} < S(\vartheta, N, a, b) <$$

$$< [(b - a + 6\varepsilon)(1 - \varepsilon) + \varepsilon] \frac{N}{\log N},$$

woraus offenbar die Behauptung folgt.

Wir können bekanntlich ϑ durch einem Bruch $\frac{u}{v}$, $(u, v) = 1$, $v \leqq \left[\frac{N}{\log^8 N}\right] + 1$ so approximieren, daß

$$\left| \vartheta - \frac{u}{v} \right| \leqq \frac{\log^8 N}{vN}. \tag{21}$$

Fall I: $v \geqq \log^{10} N$. Dann ist $\left| p\vartheta - p\frac{u}{v} \right| \leqq \frac{1}{\log^2 N} \leqq \varepsilon$ für $N \geqq n_2(\varepsilon)$ wegen (21), es ist also

$$(22)\qquad S\left(\frac{u}{v}, N, a+\varepsilon, b-\varepsilon\right) < S(\vartheta, N, a, b) < S\left(\frac{u}{v}, a-\varepsilon, b+\varepsilon\right).$$

Es genügt also $S\left(\frac{u}{v}, N, \alpha, \beta\right)$ mit $0<\alpha<\beta<1$ abzuschätzen. Von den reduzierten Brüchen mit dem Nenner v fallen für $v>v_0(\varepsilon)$ mehr als $(\beta-\alpha-\varepsilon)\varphi(v)$ in $[\alpha, \beta]$; es gibt also genau so viele, also mehr als $(\beta-\alpha-\varepsilon)\varphi(v)$ Progressionen $vx+l$, $(l, v)=1$, so, daß $p\frac{u}{v}$ für die Primzahlen $p\equiv l \pmod v$ in $[\alpha, \beta]$ liegt mod 1. Für die Primzahlen dieser Progressionen gilt aber, da $v<\frac{N}{\log^8 N}$ die Forderung des Satzes I reichlich erfüllt, für $N>n_3(\varepsilon)$

$$(23)\qquad S\left(\frac{u}{v}, N, \alpha, \beta\right) > (\beta-\alpha-2\varepsilon)\,\varphi(v)\,\frac{1-\varepsilon}{\varphi(v)}\,\frac{N}{\log N}.$$

(23) angewendet einmal auf $\alpha=a+\varepsilon$, $\beta=b-\varepsilon$, einmal auf das komplementäre Gebiet von $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, ergibt das gewünschte Resultat.

Fall II: $v<\log^{10}N$ (P. Erdős). Wir betrachten die Primzahlen in den Intervallen $\left[1, \frac{N}{\log^{10}N}\right]$, $\left[\frac{N}{\log^{10}N}, 2\frac{N}{\log^{10}N}\right]$, $\ldots, \left[(d-1)\frac{N}{\log^{10}N}, d\frac{N}{\log^{10}N}\right], \ldots$, wo also $d\leqq\log^{10}N$ ist. Für die Primzahlen des ersten Intervalls ist nach (21)

$$\left|p\vartheta - p\frac{u}{v}\right| < \frac{N}{\log^{10}N}\,\frac{\log^8 N}{vN} < \frac{1}{\log^2 N},$$

also ist für $N>n_4(\varepsilon)$ wieder

$$(24)\qquad S\left(\frac{u}{v}, \frac{N}{\log^{10}N}, a+\varepsilon, b-\varepsilon\right) < S\left(\vartheta, \frac{N}{\log^{10}N}, a, b\right) < \\ < S\left(\frac{u}{v}, \frac{N}{\log^{10}N}, a-\varepsilon, b+\varepsilon\right).$$

Jetzt betrachten wir das d-te Intervall und es sei $p_{\min}$ die kleinste, $p_{\max}$ die größte Primzahl in diesem; da

$$\left|p_{\max}\left(\vartheta-\frac{u}{v}\right) - p_{\min}\left(\vartheta-\frac{u}{v}\right)\right| < \frac{N}{\log^{10}N}\left|\vartheta-\frac{u}{v}\right| < \frac{1}{\log^2 N},$$

so ist der Fehler, welchen man durch Ersetzen von ϑ durch $\frac{u}{v}$

begeht, nahezu gleich für alle Primzahlen des d-ten Intervalls. Es existiert also ein δ so, daß

$$\sum_{\substack{(d-1)\frac{N}{\log^{10}N}<p<d\frac{N}{\log^{10}N}\\ a+\delta+\varepsilon\leqq p\frac{u}{v}\leqq b+\delta-\varepsilon \pmod 1}} 1 < S\left(\vartheta, d\frac{N}{\log^{10}N}, a, b\right) - \tag{25}$$

$$- S\left(\vartheta, (d-1)\frac{N}{\log^{10}N}, a, b\right) < \sum_{\substack{(d-1)\frac{N}{\log^{10}N}<p<d\frac{N}{\log^{10}N}\\ a+\delta-\varepsilon\leqq p\frac{u}{v}\leqq b+\delta+\varepsilon \pmod 1}} 1.$$

Da aber nach (1) für $1\leqq d\leqq \log^{10}N$, $N>n_5(\varepsilon)$ wegen $v<\log^{10}N$

$$\sum_{\substack{(d-1)\frac{N}{\log^{10}N}<p<d\frac{N}{\log^{10}N}\\ p\equiv g \pmod v\\ (g,v)=1}} 1 > \frac{1}{\varphi(v)}\int\limits_{(d-1)\frac{N}{\log^{10}N}}^{d\frac{N}{\log^{10}N}} \frac{dt}{\log t} - 2b_1\sqrt{N}\log N >$$

$$> \frac{1}{\varphi(v)}\frac{N}{\log^{10}N}\frac{1}{\log\left(d\frac{N}{\log^{10}N}\right)} - 2b_1\sqrt{N}\log N > \frac{(1-\varepsilon)}{\varphi(v)}\frac{N}{\log^{11}N},$$

besteht, erhalten wir, wie bei Fall I, aus (25)

$$(b-a-4\varepsilon)\,\varphi(v)\frac{(1-\varepsilon)}{\varphi(v)}\frac{N}{\log^{11}N} < S\left(\vartheta, d\frac{N}{\log^{10}N}, a, b\right) -$$

$$- S\left(\vartheta, (d-1)\frac{N}{\log^{10}N}, a, b\right) < [1-(1-b+a-6\varepsilon)(1-\varepsilon)]\frac{N}{\log^{11}N} =$$

$$= [(b-a+6\varepsilon)(1-\varepsilon)+\varepsilon]\frac{N}{\log^{11}N},$$

also durch Summation nach d für $N>n_6(\varepsilon)$

$$(b-a-4\varepsilon)(1-\varepsilon)\frac{N}{\log N} < S(\vartheta, N, a, b) <$$

$$< [(b-a+6\varepsilon)(1-\varepsilon)+\varepsilon]\frac{N}{\log N},$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 26. Juni 1936)

Über den Blochschen Satz.

Von G. GRÜNWALD und P. TURÁN in Budapest.

Von Herrn BLOCH[1]) stammt der folgende Satz: *Es sei*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

regulär für $|z| \leqq 1$. *Dann enthält das Bild von* $f(z)$ *gewiß einen Kreis* $\mathfrak{K}$ *mit einem universellen konstanten Radius* r. (Zum Beispiel kann $r = \frac{1}{3}$ gewählt werden.) Im Folgenden geben wir für diesen Satz, aus welchem bekanntlich[2]) der Picardsche und der Schottkysche, also der große Picardsche Satz kurz folgt, einen sehr anschaulichen Beweis[3]). Die vollständig elementare Methode nützt von der Regularität — wenigstens scheinbar — sehr wenig aus; auf diesen Gegenstand hoffen wir noch zurückzukommen.

Der Beweis erfordert zwei Lemmata.

Lemma 1. *Es sei*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

regulär für $|z| \leqq 1$; $t(r)$ *bedeute den Inhalt,* $k(r)$ *die Bogenlänge des Bildes von* $|z| \leqq r$ *(alles mehrfache entsprechend gezählt). Dann gibt es ein* r_0, $0 < r_0 \leqq 1$, *derart, daß*

---

1) A. BLOCH, Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation, *Annales de la Faculté de Sciences de l'Université de Toulouse,* 17 (1925), S. 1—22.

2) S. E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie,* 2. Auflage (Berlin, 1929).

3) Auch der unabhängig voneinander von LANDAU und VALIRON gefundene Beweis ist sehr einfach (E. LANDAU, Der Picard—Schottkyschen Satz und die Blochsche Konstante, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie,* 1926, S. 467—474; G. VALIRON, Sur les théorèmes de MM. Bloch, Landau, Montel et Schottky, *Comptes Rendus Paris,* 183 (1926), S. 728—730), und zwar gibt mehr ($\mathfrak{K}$ ist schlicht bedeckt).

$$\frac{t(r_0)}{k(r_0)} \geq \frac{1}{2\sqrt{e}} \left(> \frac{5}{17}\right).$$

B e w e i s. Nach der bekannten Formel ist wegen (1)

$$(2) \qquad t(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\varphi})|^2 \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \pi \left[r^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 r^{2\nu} \right],$$

$$(3) \qquad k(r) = \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})| r \, d\varphi \leq$$

$$\leq r \sqrt{2\pi \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi} = 2\pi r \sqrt{1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^2 |a_\nu|^2 r^{2\nu-2}},$$

also

$$\frac{t(r)}{k(r)} \geq \frac{1}{2r} \frac{r^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 r^{2\nu}}{\sqrt{1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^2 |a_\nu|^2 r^{2\nu-2}}},$$

oder für $r = \sqrt{\varrho}$

$$(4) \qquad \frac{t(\sqrt{\varrho})}{k(\sqrt{\varrho})} \geq \frac{1}{2\sqrt{\varrho}} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 \varrho^\nu}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 |a_\nu|^2 \varrho^{\nu-1}}}, \qquad a_1 = 1.$$

Wenn wir

$$(5) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 \varrho^\nu = \Phi(\varrho)$$

setzen, ist

$$(6a) \qquad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\varrho) \geq \varrho, \quad \Phi'(\varrho) \geq 1,$$

und

$$(6b) \qquad \frac{t(\sqrt{\varrho})}{k(\sqrt{\varrho})} \geq \frac{1}{2\sqrt{\varrho}} \frac{\Phi(\varrho)}{\sqrt{\Phi'(\varrho)}}, \qquad 0 \leq \varrho \leq 1.$$

Wenn in diesem Intervalle überall

$$\frac{\Phi(\varrho)}{\sqrt{\varrho \Phi'(\varrho)}} < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

gelten würde, so wäre da

$$\frac{\Phi'(\varrho)}{\Phi(\varrho)^2} > \frac{e}{\varrho}$$

und Integration von ϱ bis 1 würde

$$\frac{1}{\Phi(\varrho)}-\frac{1}{\Phi(1)}>e\log\frac{1}{\varrho},\qquad 0\leqq\varrho\leqq 1$$

ergeben. Dann wäre aber wegen $\Phi(\varrho)\geqq\varrho$ a fortiori

$$\frac{1}{\varrho}>e\log\frac{1}{\varrho},$$

was aber für $\varrho=\frac{1}{e}$ nicht richtig ist[4]), w. z. b. w.

Lemma 2. *Es sei Γ ein Bereich mit dem Flächeninhalt t, deren Berandung eine geschlossene rektifizierbare Jordan-Kurve l von der Länge k bildet. Dann kann man in Γ einen Kreis mit dem Radius $c_2\frac{t}{k}$ einschreiben; hier ist c_2 eine absolute Konstante*[5]).

Beweis. Es sei ϱ_m das Maximum der Radien der eingeschriebenen Kreise; ein solches existiert bestimmt. Es sei P_0 ein beliebiger Punkt auf l; durch wiederholtes Auftragen der Länge ϱ_m, von P_0 ausgehend, auf der Kurve l erhalten wir die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$. Die Zahl ν werde dabei so gewählt, daß $\nu\varrho_m<k\leqq(\nu+1)\varrho_m$. Wir schlagen um jeden P_μ als Zentrum einen Kreis mit dem Radius $2\varrho_m$. Wir behaupten nun, daß diese Kreise unser Gebiet ganz bedecken. Wenn nämlich ein innerer Punkt A nicht bedeckt wäre, dann wäre

$$\overline{P_\mu A}>2\varrho_m,\qquad \mu=1,2,\ldots,\nu.$$

Nach der Definition von ϱ_m schneidet der Kreis um A mit dem Radius $\frac{3}{2}\varrho_m$ die Kurve l; einer der Schnittpunkte sei B, dieser liege z. B. auf dem Bogen $P_\mu P_{\mu+1}$ ($P_{\nu+1}=P_0$). Da einer der Bogen BP_μ und $BP_{\mu+1}$, z. B. der Bogen BP_μ, kleiner oder

---

4) Allgemeiner gilt: *Wenn $\Phi(x)$ für $[0, 1]$ stetig differentiierbar ist und dort $\Phi(x)\geqq x$ gilt, dann gibt es zu jedem $\alpha>1$ ein $0\leqq\xi\leqq 1$ so, daß $\frac{\Phi(\xi)}{|\Phi'(\xi)|^{1/\alpha}}\geqq c_1$ ist, wo c_1 nur von α abhängt. Für $\alpha=1$ gilt der Satz nicht.*

5) Hier wird $c_2\geqq\frac{1}{4\pi+2}$ bewiesen. Nach G. Grünwald und E. Vázsonyi ist $c_2\geqq 1$ und dies ist die bestmögliche Abschätzung. Wenn Γ ein Dreieck ist, ist das Resultat mit $c_2=2$ aus den Elementen der Geometrie bekannt.

gleich $\frac{\varrho_m}{2}$ ist, wäre

$$\overline{BP}_\mu + \overline{BA} \leqq \widehat{BP}_\mu + \frac{3}{2}\varrho_m \leqq 2\varrho_m < \overline{AP}_\mu,$$

was aber unmöglich ist. Die Summe der Inhalte der Kreise ist also nicht kleiner, als der Flächeninhalt der Kurve; daher ist

$$\left(1 + \left[\frac{k}{\varrho_m}\right]\right) 4\varrho_m^2 \pi \geqq t.$$

Da der Inkreis eine kleinere Bogenlänge hat, als die Kurve l, so ist

$$2\varrho_m \pi \leqq k,$$

also

$$\left(\frac{k}{2\varrho_m \pi} + \frac{k}{\varrho_m}\right) 4\varrho_m^2 \pi \geqq \left(1 + \left[\frac{k}{\varrho_m}\right]\right) 4\varrho_m^2 \pi \geqq t,$$

$$\varrho_m \geqq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{2\pi}} \frac{t}{k}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

B e w e i s d e s S a t z e s Es sei

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

regulär für $|z| \leqq 1$, der (offenbar geschlossene) Bildbereich von $|z| = r_0$ sei $\mathfrak{B}$, wo r_0 die durch Lemma 1 gegebene Konstante bedeutet. Es sei H_ν die Menge derjenigen Punkte in $\mathfrak{B}$, welche wenigstens ν-fach bedeckt sind; dann gilt

$$H_1 \supset H_2 \supset \ldots.$$

Ferner besteht jedes H_ν aus höchstens abzählbar[6]) vielen, abgeschlossenen, fremden, durch Jordankurven begrenzten Gebieten $\Gamma_{\ \nu}, \Gamma_{2\nu}, \ldots$, von welchen einige zu Punkten oder zu doppelt zu zählenden Kurvenbogen entarten dürfen. Die Begrenzung *aller* $\Gamma_{\mu\nu}$ macht das Bild von $|z| = r_0$ durch $f(z)$ aus. Der Inhalt von $\Gamma_{\mu\nu}$ sei $t_{\mu\nu}$, der Umfang $k_{\mu\nu}$ und der Inkreisradius $\varrho_{\mu\nu}$. Da

(7a) $$\sum_{\mu,\nu} t_{\mu\nu} = t(r_0),$$

(7b) $$\sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu} = k(r_0)$$

6) Übrigens folgt bekanntlich aus der Voraussetzung der Regularität auf $|z| \leqq 1$, daß ingesamt nur endlich viele (nichtleere) $\Gamma_{\mu\nu}$ vorhanden sind. Dies wollen wir aber beim Beweise nicht ausnützen.

und nach Lemma 2

$$\varrho_{\mu\nu} \geqq \frac{1}{4\pi+2} \frac{t_{\mu\nu}}{k_{\mu\nu}}$$

ist, gelangen wir von (7a) durch Addition zu

$$\sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu} \varrho_{\mu\nu} \geqq \frac{1}{4\pi+2} t(r_0),$$

also folgt nach (7b) und Lemma 1, daß

$$\varrho_{11} = \max \varrho_{\mu\nu} \geqq \frac{\sum\limits_{\mu,\nu} k_{\mu\nu} \varrho_{\mu\nu}}{\sum\limits_{\mu,\nu} k_{\mu\nu}} > \frac{1}{4\pi+2} \frac{t(r_0)}{k(r_0)} \geqq \frac{1}{4\pi+2} \frac{1}{2\sqrt{e}},$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 30. November 1936.)

Über diophantische Gleichungen der Form $n! = x^p \pm y^p$ und $n! \pm m! = x^p$.

Von PAUL ERDŐS in Manchester und RICHARD OBLÁTH in Budapest.

Einleitung.

Man hat bereits öfters vermutet, jedoch bisher allgemein nicht bewiesen[1]), daß die unbestimmten Gleichungen

(I) $$n! = x^p + y^p \qquad (p > 1)$$

und

(II) $$n! = x^p - y^p \qquad (p > 2)$$

außer der trivialen Lösung $x = y = 1$, $n = 2$ von (I) keine Lösung in positiven ganzen Zahlen x, y, p, n zulassen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß in (I) p eine Primzahl bzw. in (II) $p = 4$ oder p eine Primzahl ist. Der Fall $p = 2$ von (I) d. h. die Gleichung

(Ia) $$n! = x^2 + y^2$$

ist leicht zu erledigen[2]), da es zwischen $\frac{n}{2}$ und n für $n \geqq 7$ stets

[1]) Betreffend der Literatur dieser Frage vgl. L. DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, Vol. II: *The Diophantine Analysis* (Washington, 1919), pp. 681, 682. Außer den daselbst zitierten Arbeiten sind uns noch die beiden folgenden Mitteilungen bekannt: A. GÉRARDIN, Question 597, *Mathesis*, (3) **6** (1906), pp. 218—219 und A. FLECHSENHAAR, Aufgabe 455, *Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht*, **45** (1919), p. 440. Beide ohne nennenswertes Resultat.

H. BROCARD, Question 2999, *Intermédiaire des math.*, **13** (1906), p. 130, sagt ausdrücklich, daß er lange vergeblich einen Beweis gesucht hat.

B e m e r k u n g b e i d e r K o r r e k t u r. Nachträglich erhielten wir Kenntnis von der folgenden Arbeit: H. GUPTA, On the Diophantine Equation $m^2 = n! + 1$, *American Math. Monthly*, **43** (1936), p. 32—34. Sie enthält nur numerische Rechnungen.

[2]) Für $y = 1$ steht dies bei FLECHSENHAAR, a. a. O. [1]).

eine Primzahl q der Form $4k+3$ gibt[3]); da nun $n!$ durch q, nicht aber durch q^2 teilbar ist, so ist (Ia) für $n \geqq 7$ unmöglich (und auch für $n=3, 4, 5$, wegen $3|n!$, $9 \nmid n!$). Es ist jedoch $6! = 12^2 + 24^2$.

Wir beschränken unsere Untersuchung auf den Fall, daß x und y teilerfremd sind. Wir beweisen dann in § 2, daß (I) und (II), außer der erwähnten trivialen, keine Lösung besitzen, falls p eine ungerade Primzahl bedeutet, also auch dann nicht, falls p eine beliebige ungerade Zahl oder auch eine Zahl bedeutet, die keine Potenz von 2 ist.

Die Hauptstütze unseres Beweises bildet die Formel (V), welche eine Abschätzung des Beitrages der Primzahlen von der Form $2kp+1$ zur Primfaktorendarstellung von $n!$ liefert. Diese Formel beweisen wir in § 1 durch dieselbe Methode, welche einer von uns für die Abschätzung des Produktes der in einer beliebigen arithmetischen Reihe enthaltenen Primzahlen unter einer gegebenen Grenze entwickelt hat[4]). Der Primzahlsatz[5]) würde allerdings schärfere Abschätzungen liefern; die hier angewandte Methode besitzt aber außer ihrem elementaren Charakter den Vorzug, Resultate zu liefern, die von Anfang an gültig sind, während bekanntlich die Bestimmung des Geltungsbereiches einer aus dem Primzahlsatze gewonnenen numerischen Abschätzung langes Rechnen erfordert[6]).

Durch dieselbe Methode werden wir im § 3 die Unlösbarkeit der Gleichung (II) für $p=8$, d. h. von

(IIa) $$n! = x^8 - y^8$$

beweisen (woraus natürlich die Unlösbarkeit von (II) für $p=2^\alpha$, $\alpha \geqq 3$ folgt).

Für $p=4$, d. h. bei der Gleichung

(IIb) $$n! = x^4 - y^4$$

---

[3]) R. Breusch, Zur Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulates, daß zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen, *Math. Zeitschrift*, **34** (1932), pp. 505—526; P. Erdős, Über die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen, *Math. Zeitschrift*, **39** (1935), pp. 473—491.

[4]) P. Erdős, a. a. O. [3]), insbesondere p. 485, Formel (12). *Die hier gegebene Abschätzung ist jedoch etwas schärfer.* Siehe auch G. Ricci, Sul teorema di Dirichlet relativo alla progressione aritmetica, *Bolletino dell'Unione Mat. Italiana*, **12** (1933), pp. 304—309.

[5]) Unter „Primzahlsatz" wird stets der auf die entsprechende arithmetische Reihe bezügliche Primzahlsatz verstanden.

[6]) Siehe z. B. bei Breusch, a. a. O. [3]).

versagt hingegen die erwähnte Formel (V). Der Unmöglichkeitsbeweis dieser Gleichung erfordert nämlich so genaue Kentnisse über die Verteilung der Primzahlen unter den beiden arithmetischen Reihen $4k+1$ und $4k+3$, wie sie derzeit nur der Primzahlsatz[5]) liefern kann. Daher können wir die Unlösbarkeit der Gleichung (IIb) nur für hinreichend große n beweisen. § 4 enthält einen hierzu nötigen Hilfssatz aus der analytischen Zahlentheorie, § 5 den Unlösbarkeitssatz.

Im § 6 beschäftigen wir uns mit einem Problem, das gewissermaßen als Gegenstück des ersten betrachtet werden kann. Wir werden nämlich, ebenfalls mit Hilfe des (gewöhnlichen) Primzahlsatzes beweisen, daß die unbestimmten Gleichungen

$$\text{(III)} \qquad n! \pm m! = x^p \qquad (n > m > 1,\ p > 1)$$

höchstens endlich viele Lösungen zulassen.

Die beiden Resultate können kurz und frappant etwa so formuliert werden: *Faktorialzahlen sind* (im allgemeinen) *keine Potenzsummen* oder Potenzdifferenzen und *Summen* oder Differenzen *zweier Faktorialzahlen sind* (im allgemeinen) *keine vollen Potenzen.*

§ 1. Abschätzung des Beitrages gewisser Primfaktoren zu $n!$.

Nach einem klassischen Satz von LEGENDRE lautet der Exponent einer Primzahl q in der Zerlegung der Zahl $n!$ in Primfaktoren

$$\text{(1)} \qquad u(n, q) = \left[\frac{n}{q}\right] + \left[\frac{n}{q^2}\right] + \left[\frac{n}{q^3}\right] + \ldots$$

Also ist der Beitrag aller in einer arithmetischen Progression $ak+b$ ($(a, b) = 1$, $0 < b < a$) enthaltenen Primzahlen zur Primfaktorendarstellung von $n!$

$$T(n, a, b) = \prod_{\substack{q \equiv b \pmod a \\ q \text{ Primzahl}}} q^{u(n, q)} = \prod_{\substack{q \equiv b \pmod a \\ q \text{ Primzahl}}} \prod_{r=1}^{\infty} q^{\left[\frac{n}{q^r}\right]}.$$

Wir werden diesen Ausdruck ähnlicherweise umformen, wie es bei Ableitung der Tschebyscheff—de Polignacschen Identität[7]) mit

---

[7]) E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig und Berlin, 1909), I, p. 87.

$n!$ geschieht. Der Bequemlichkeit der Schreibweise halber gehen wir zu den Logarithmen über[8]:

$$\log T(n,a,b) = \sum_{\substack{q\equiv b \pmod a\\ q \text{ Primzahl}}} \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n}{q^r}\right] \log q =$$

$$= \sum_{\substack{q\equiv b \pmod a\\ q \text{ Primzahl}}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s\leq \frac{n}{q^r}} \log q = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{q\equiv b \pmod a\\ q\leq \sqrt[r]{n/s} \text{ Primzahl}}} \log q,$$

also ist, wenn man

$$\Psi(x,a,b) = \prod_{r=1}^{\infty} \prod_{\substack{q\equiv b \pmod a\\ q\leq \sqrt[r]{x} \text{ Primzahl}}} q = \prod_{q\leq x} q \prod_{q\leq \sqrt{x}} q \prod_{q\leq \sqrt[3]{x}} q \ldots$$

setzt (wobei q die in der arithmetischen Reihe $ak+b$ enthaltenen Primzahlen durchläuft),

$$T(n,a,b) = \prod_{s=1}^{\infty} \Psi\left(\frac{n}{s}, a, b\right) = \tag{2}$$

$$= \Psi(n,a,b)\, \Psi\left(\frac{n}{2}, a, b\right) \Psi\left(\frac{n}{3}, a, b\right) \ldots$$

Nun beschränken wir uns, im Einklang mit unserem Ziele, auf den Spezialfall $b=1$ und schreiben statt $T(n,a,1)$ und $\Psi(x,a,1)$ kürzer $T(n,a)$ bzw. $\Psi(x,a)$. Wir werden $\Psi(x,a)$ von oben abschätzen; daraus gewinnen wir dann mit Hilfe von (2) eine Abschätzung von $T(n,a)$.

Zu diesem Zwecke untersuchen wir den Ausdruck[9])

$$P(m,a) = \prod_{\substack{p\mid a\\ p \text{ Primzahl}}} p^{\left[\frac{m-1}{p-1}\right]} \frac{(a+1)(2a+1)\ldots((m-1)a+1)}{m!},$$

wobei m eine beliebige positive ganze Zahl sein kann. Wegen

$$\frac{ka+1}{k+1} \leq a \qquad (k=1,2,\ldots,m-1)$$

ergibt sich unmittelbar die Abschätzung

$$P(m,a) \leq \prod_{\substack{p\mid a\\ p \text{ Primzahl}}} p^{\frac{m-1}{p-1}} a^{m-1} = A^{m-1} \tag{3}$$

[8]) Sämtliche Umformungen sind gestattet, da die Reihen nur scheinbar unendlich sind.

[9]) Identisch mit $P'_m(a,1)$ bei Erdős, a. a. O. [3]).

mit

$$(4) \qquad A = A(a) = a \prod_{\substack{p \mid a \\ p \text{ Primzahl}}} p^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ferner ist $P(m, a)$ eine ganze Zahl. In der Tat kommt eine Primzahl q in der Primfaktorendarstellung von $(a+1)(2a+1)\ldots((m-1)a+1)$ offenbar mit dem Exponenten

$$(5) \qquad v(m,q) = v_1(m,q) + v_2(m,q) + v_3(m,q) + \ldots$$

vor, wobei $v_r(m,q) = v_r(m,q,a)$ die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $q^r x \equiv 1 \pmod a$ mit der Nebenbedingung $1 \leqq q^r x \leqq \leqq (m-1)a+1$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $0 < q^r x \leqq ma$ bedeutet. Für x steht also das Intervall $1 \leqq x \leqq \left[\frac{ma}{q^r}\right]$ zur Verfügung; wegen $\left[\frac{ma}{q^r}\right] \geqq a \left[\frac{m}{q^r}\right]$ enthält dieses Intervall jedenfalls $\left[\frac{m}{q^r}\right]$ vollständige Restsysteme mod a; ist $(q, a) = 1$, so ist daher

$$(6) \qquad v_r(m,q) \geqq \left[\frac{m}{q^r}\right] \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

also wegen (1) und (5)

$$v(m,q) \geqq u(m,q),$$

d. h. die zu a teilerfremden Primzahlen q kommen im Zähler von $P(m, a)$ mindestens in derselben Multiplizität vor, wie im Nenner. Das Gleiche gilt aber auch für die Primzahlen $q \mid a$ wegen

$$(q-1)\,u(n,q) < (q-1)\left(\frac{n}{q} + \frac{n}{q^2} + \frac{n}{q^3} + \ldots\right) = n,$$

woraus sich wegen der Ganzzahligkeit von $u(n, q)$

$$(q-1)\,u(n,q) \leqq n-1, \quad u(n,q) \leqq \frac{n-1}{q-1}, \quad u(n,q) \leqq \left[\frac{n-1}{q-1}\right]$$

ergibt.

Es sei nun q eine Primzahl von der Form $ak+1$, die einem der Intervalle $m < q < ma+1$, $\sqrt{m} < q < \sqrt{ma+1}$, $\sqrt[3]{m} < q < \sqrt[3]{ma+1}, \ldots$ angehört. Diese Intervalle können sich zwar teilweise überdecken; doch kann q nicht dem Durchschnitt zweier dieser Intervalle angehören, da aus $\sqrt[r]{m} < q < \sqrt[r+1]{ma+1}$

$$q = \frac{q^{r+1}}{q^r} < \frac{ma+1}{m} \leqq a+1$$

folgen würde, während offenbar $q \geqq a+1$.

Ist nun $\sqrt[s]{m} < q < \sqrt[s]{am+1}$, so ist offenbar $v_s(m, q) = 1$, $\left[\frac{m}{q^s}\right] = 0$, also wegen (1), (5) und (6)

$$v(m, q) > u(m, q),$$

d. h. $P(m, a)$ ist durch q teilbar. Also ist

$$Q(m, a) = \prod_{r=1}^{\infty} \prod_{\substack{\sqrt[r]{m} < q < \sqrt[r]{am+1} \\ q \equiv 1 \pmod a \\ q \text{ Primzahl}}} q =$$

$$= \prod_{m < q < am+1} q \prod_{\sqrt{m} < q < \sqrt{am+1}} q \prod_{\sqrt[3]{m} < q < \sqrt[3]{am+1}} q \ldots$$

(wobei q — wie auch weiter unten in diesem Paragraphen — die Primzahlen von der Form $ak+1$ durchläuft) ein Teiler von $P(m, a)$; wegen (3) ist also

$$Q(m, a) \leqq A^{m-1}.$$

Ersetzen wir hier die Zahl m der Reihe nach durch

$$m_1 = \left\{\frac{m}{a}\right\}, \quad m_2 = \left\{\frac{m}{a^2}\right\}, \ldots, m_s = \left\{\frac{m}{a^s}\right\} = 1 \qquad (a^{s-1} < m \leqq a^s),$$

wobei $\{t\}$ die kleinste ganze Zahl $\geqq t$ bezeichnet, und multiplizieren wir die so entstandenen Ungleichungen, so gewinnen wir wegen

$$am_{r+1} + 1 \geqq a\frac{m}{a^{r+1}} + 1 = \frac{m}{a^r} + 1 > m_r$$
$$(r = 0, 1, 2, \ldots, s-1;\ m_0 = m)$$

die Ungleichung

$$(7) \qquad \prod_{r=1}^{\infty} \prod_{q < \sqrt[r]{am+1}} q \leqq Q(m, a)\, Q(m_1, a)\, Q(m_2, a) \ldots Q(m_s, a) \leqq$$
$$\leqq A^{m+m_1+m_2+\ldots+m_s-s-1}.$$

Nun ist aber $q < \sqrt[r]{am+1}$ mit $q^r < am+1$, $q^r \leqq am$, also $q \leqq \sqrt[r]{am}$ gleichbedeutend, so daß für die rechte Seite von (7) $\Psi(am, a)$ geschrieben werden kann; ferner ist

$$m+m_1+m_2+\ldots+m_s \leqq m+\frac{m+a-1}{a}+\frac{m+a^2-1}{a^2}+\ldots+$$
$$+\frac{m+a^s-1}{a^s}=(m-1)\left(1+\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{a^s}\right)+s+1<$$
$$<(m-1)\frac{a}{a-1}+s+1,$$

was in (7) eingesetzt

$$\Psi(am, a) \leqq A^{\frac{a}{a-1}(m-1)}$$

ergibt. Zu gegebenem (nicht notwendig ganzem) $x>0$ sei m durch die Bedingung

$$a(m-1)<x \leqq am$$

bestimmt; dann erhalten wir die auch *an und für sich interessante Abschätzung*

$$\text{(IV)} \qquad \Psi(x, a) \leqq A^{\frac{x}{a-1}}.$$

Als interessanter *Spezialfall* sei

$$\text{(IVa)} \qquad \Psi(x, 4)=\prod_{r=1}^{\infty} \prod_{\substack{q \equiv 1 \pmod 4 \\ q \leqq \sqrt[r]{x} \text{ Primzahl}}} q \leqq 2^x$$

hervorgehoben (in der Tat ist $A(4)=4.2=8$).

Nun wenden wir (IV) zur Abschätzung des Beitrages $T(n, a)$ der Primfaktoren von der Form $ak+1$ zu $n!$ an. Bezeichnet q die kleinste Primzahl dieser Form und bemerkt man, daß für $x<q_0$ $\Psi(x, a)=1$ ist, so gewinnt man aus (2) $(b=1)$

$$T(n, a)=\prod_{s \leqq \frac{n}{q_0}} \Psi\left(\frac{n}{s}, a\right) \leqq A^{\frac{n}{a-1} \sum_{s \leqq \frac{n}{q_0}} \frac{1}{s}},$$

also, wegen[10]) $\sum_{s \leqq x} \frac{1}{s} \leqq \log x+1$, die gesuchte Abschätzung

$$\text{(V)} \qquad T(n, a) \leqq A^{\frac{n}{a-1}\left(\log \frac{n}{q_0}+1\right)}.$$

Für die Anwendungen kommen für uns nur die beiden Spezialfälle 1) $a=2p$, p ungerade Primzahl; 2) $a=8$ in Betracht.

---

[10]) Für ganze x ergibt sich diese Ungleichung z. B. durch vollständige Induktion, und daraus auch für nicht ganze Werte.

Im ersten Falle ist nach (4)

$$A(2p) = 2p \,.\, 2 \,.\, p^{\frac{1}{p-1}} = 4p^{\frac{p}{p-1}}$$

und

$$q_0 \geqq 2p + 1 \geqq 7,$$

also

(Va) $$T(n, 2p) \leqq \left(4p^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n}{2p-1}(\log n - \log 7 + 1)};$$

im zweiten Falle

$$A(8) = 8 \,.\, 2 = 16$$

und

$$q_0 = 17,$$

also

(Vb) $$T(n, 8) \leqq 16^{\frac{n}{7}(\log n - \log 17 + 1)}$$

§ 2. Der Fall einer ungeraden Primzahl p.

Nehmen wir an, es sei

(8) $$n! = x^p \pm y^p,$$

$x > y > 0$ ganz, $(x, y) = 1$, und p eine ungerade Primzahl, ferner im Falle des Pluszeichens nicht zugleich $x = 1$, $y = 1$. Wir werden daraus einen Widerspruch ableiten.

Setzen wir

$$B_1 = x \pm y,$$
$$B_2 = \frac{x^p \pm y^p}{x \pm y} = x^{p-1} \mp x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 \mp \ldots + y^{p-1};$$

dann ist nach (8)

(9) $$n! = B_1 B_2.$$

Bekanntlich[11]) besitzt B_2 nur Primteiler von der Form $kp + 1$, ausgenommen eventuell den Primteiler p (der auch dann nur in der ersten Potenz in B_2 enthalten sein kann). Daraus folgt, daß B_2 höchstens gleich dem p-fachen Beitrage der Primfaktoren von der Form $kp + 1$, d. h. von der Form $2kp + 1$, zu $n!$ ist:

(10) $$B_2 \leqq p\, T(n, 2p).$$

---

[11]) L. Euler, 1747. S. z. B. *Commentationes Arithmeticae Collectae* (Petropoli, 1849), I, p. 50. und II, p. 523. Auch in Lehrbüchern, s. z. B. G. Wertheim, *Anfangsgründe der Zahlenlehre* (Braunschweig, 1902), p. 298.

Ferner findet man leicht[12])

(11) $$B_1^2 \leqq 4 B_2.$$

Aus (Va), (9), (10) und (11) folgt nun einerseits

$$n!^2 = B_1^2 B_2^2 \leqq 4 B_2^3 \leqq 4 p^3 \left(4 p^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{3}{2p-1} n (\log n - \log 7 + 1)}$$

Andererseits ist aber[13])

$$n! > 2\left(\frac{n}{e}\right)^n = 2 e^{n(\log n - 1)};$$

aus den beiden Ungleichungen gewinnt man

(12) $$\frac{2}{3} n(\log n - 1) < \log p + \\ + \frac{1}{2p-1}\left(\log 4 + \frac{p}{p-1}\log p\right) n (\log n - \log 7 + 1).$$

Um aus (12) weitere Folgerungen ziehen zu können, bemerken wir, daß notwendig $n \geqq 2p+1$ ist. Sonst wäre nämlich $n!$ durch keine Primzahl von der Form $2kp+1$ teilbar, also entweder $B_2 = 1$, oder $B_2 = p$. Im Falle des Minuszeichens in (8) gilt aber

$$B_2 = x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots + y^{p-1} > p$$

außer $x = y = 1$, was keine Lösung von II liefert. Im Falle des Pluszeichens kann $B_2 = 1$, d. h.

$$x^p + y^p = x + y$$

offenbar nur im Falle der ausgenommenen trivialen Lösung $x = y = 1$ stattfinden; aus $B_2 = p$, d. h.

$$x^p + y^p = p(x + y)$$

folgt aber, wie wir sofort zeigen werden, $x = 2$, $y = 1$, $p = 3$, also $x^p + y^p = 9$, was keine Faktorialzahl ist. In der Tat, aus $x \geqq y$ folgt zunächst $y = 1$, sonst wäre $x \geqq 2$, $y \geqq 2$, $x^{p-1} > p$, $y^{p-1} > p$, $x^p + y^p > p(x+y)$; ferner gilt wegen $x \geqq 2$

---

[12]) In der Tat ist

$$(x+y)^3 \leqq (x+y)^3 + 3(x+y)(x-y)^2 = 4(x^3+y^3) \leqq 4(x^p+y^p)$$

und

$$(x-y)^2 < x^2 + xy + y^2 < x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + y^{p-1}.$$

[13]) Aus der Exponentialreihe folgt nämlich ohne weiteres

$$e^n > \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n^n}{n!} = 2\frac{n^n}{n!}.$$

$$\frac{x^p+1}{x+1} \geqq x^{p-1} - x^{p-2} + 1 = (x-1)x^{p-2} + 1 \geqq 2^{p-2} + 1 \geqq p$$

und das Gleichheitszeichen gilt offenbar nur für $p=3$, $x=2$.

Kehren wir nun zur Ungleichung (12) zurück! Durch Differenzieren weist man unschwer nach[14]), daß die rechte Seite für $n \geqq 7$, $3 \leqq p \leqq \frac{n-1}{2}$ monoton abnimmt; daher folgt aus (12)

$$\frac{2}{3} n (\log n - 1) < \log 3 + \frac{1}{5}\left(\log 4 + \frac{3}{2}\log 3\right) n(\log n - \log 7 + 1).$$

Man sieht leicht, daß diese Ungleichung für $n \geqq 20$ falsch ist, also $n!^2 > 4B_2^3$ besteht. Eine numerische Nachprüfung[15]) zeigt, daß das Gleiche auch für $n \leqq 19$ der Fall ist; damit haben wir die Unmöglichkeit der Gleichung (8) ganz allgemein bewiesen. Es gilt also der

Satz 1. *Außer $2! = 2$ läßt sich keine Faktorialzahl als Summe oder Differenz der p-ten Potenzen zweier teilerfremden Zahlen darstellen, sobald $p \geqq 3$ keine Potenz von 2 ist.*

Korollar. *Die Zahlen $n! \pm 1$ $(n > 2)$ sind keine p-ten Potenzen.*

§ 3. Der Fall $p=8$.

Um die Unmöglichkeit der Gleichung

(IIa) $$n! = x^8 - y^8$$

$((x, y) = 1)$ nachzuweisen, verfahren wir in ähnlicher Weise. Wir setzen

$$B_1 = x^4 - y^4, \quad B_2 = x^4 + y^4;$$

---

[14]) Man findet, daß die Derivierte der rechten Seite gleich

$$\frac{1}{p} - c\,\frac{2p^2-1}{(p-1)^2(2p-1)^2}\log p - c\,\frac{2(\log 4 - 1)p - (2\log 4 - 1)}{(p-1)(2p-1)^2}$$

ist, wobei $c = n(\log n - \log 7 + 1) \geqq n$. Das dritte Glied ist von Anfang an (d. h. für $p \geqq 3$) negativ, das zweite ist für $3 \leqq p \leqq \frac{n-1}{2}$ wegen $\log p > 1$, $(2p-1)^2 < 2(2p^2-1)$ absolut größer als

$$\frac{n}{2(p-1)^2} > \frac{n}{2p^2} \geqq \frac{n}{p(n-1)} > \frac{1}{p}.$$

[15]) Man beachte dabei, daß $p \leqq \frac{n-1}{2} \leqq 9$, ferner $2.7+1=15$ keine Primzahl ist, also nur die Fälle $p=3$ und $p=5$ in Betracht kommen. Diese Fälle erledigt man leicht mit Hilfe der Ungleichung (10).

dann folgt aus (IIa) wegen $B_1 < B_2$

(13) $$n! = B_1 B_2 < B_2^2.$$

Ferner ist

(14) $$B_2 \leqq 2\,T(n, 8),$$

da B_2 bekanntlich[16]) — eventuell vom einfachen Primfaktor 2 abgesehen — lauter Primteiler von der Form $8k+1$ besitzt. Aus (Vb), (12), (13) und $n! > 2\left(\frac{n}{e}\right)^n$ folgt nun

$$n^n e^{-n} < 2 \,.\, 16^{\frac{2n}{7}(\log n - \log 17 + 1)},$$

$$n \log n - n < \log 2 + \frac{8}{7} n \log 2 (\log n - \log 17 + 1),$$

oder, nach numerischer Durchführung der Rechnungen

$$0{,}208\, n \log n + 0{,}451\, n < 0{,}694,$$

was ersichtlich bereits für $n \geqq 2$ unmöglich ist; für $n = 1$ hat aber (IIa) offenbar ebenfalls keine Lösung. Es besteht demnach der

Satz 2. *Die Differenz der achten Potenzen zweier teilerfremden ganzen Zahlen ist niemals eine Faktorialzahl.* Speziell ist also $n! + 1$ niemals eine achte Potenz.

§ 4. Ein Hilfssatz über Charaktere.

Um unseren Satz auf vierte Potenzen ausdehnen zu können, müssen wir den befolgten Weg verlassen, denn die Primzahlen sind in den arithmetischen Reihen $4k+1$ und $4k+3$ asymptotisch gleich verteilt, es fehlt also die Grundlage, auf welche der entscheidende Schritt unserer Schlußweise sich gründete.

Tiefere Hilfsmittel führen aber auch in diesem Falle zum Ziele. Im weiteren Verlaufe unserer Untersuchung benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. *Die Summe*

$$\sum_{q^r \leqq n} \frac{\chi(q^r) \log q}{q^r}$$

ist für hinreichend großes n *stets negativ; dabei bedeutet* $\chi(n)$ *den Nichthauptcharakter* mod 4 *und* q^r *durchläuft bei der Summation die Primzahlpotenzen.*

---

[16]) Vgl. a. a. O. [11]).

Den Ausgangspunkt des Beweises bildet die bekannte, formal leicht erhältliche Identität[17])

$$(15) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\log n}{n} = \sum_{\substack{q^r \\ q \text{ Primzahl}}} \frac{\chi(q^r)\log q}{q^r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}.$$

In der Tat sind zunächst alle drei unendliche Reihen konvergent. Für die erste und dritte Reihe ist dies evident, denn ihre Glieder haben alternierende Vorzeichen und nehmen dem absoluten Betrage nach monoton ab; die Konvergenz der mittleren Reihe folgt, wie bekannt, aus dem Primzahlsatze (für die arithmetischen Reihen $4k+1$ bzw. $4k+3$. Und umgekehrt: aus der Konvergenz folgt der Primzahlsatz). Ein klassischer Satz aus der Theorie der Dirichletschen Reihen besagt[18]), daß wenn das formale Dirichletsche Produkt zweier konvergenten Reihen wieder konvergiert, so ist die Summe der Produktreihe das Produkt der Summen der beiden Reihen.

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \left(= \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\log n}{n} = -\left(\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 5}{5}\right) - \left(\frac{\log 7}{7} - \frac{\log 9}{9}\right) - \ldots < 0$$

ist die Summe der Reihe $\sum_{q \text{ Primzahl}} \frac{\chi(q^r)\log q}{q^r}$ negativ, womit unser Hilfssatz bewiesen ist.

§ 5. Der Fall $p = 4$.

Um die Unmöglichkeit der Gleichung

$$(\text{IIb}) \qquad n! = x^4 - y^4$$

für hinreichend große n zu beweisen, verfahren wir wie folgt. Setzt man

$$B_1 = x^2 - y^2, \quad B_2 = x^2 + y^2,$$

so folgt

$$B_1 < B_2, \quad B_1 B_2 = n!,$$

ferner, da B_2 — vom eventuellen einfachen Primfaktor 2 abgesehen — nur durch Primzahlen von der Form $4k+1$ teilbar ist,

[17]) Vgl. LANDAU, a. a. O. [7]), p. 447.
[18]) Vgl. LANDAU, a. a. O. [7]), II, p. 765.

$$B_2 \leqq 2T(n, 4, 1)$$

und

$$B_1 \geqq 2^{u(n,2)-1}\, T(n, 4, 3).$$

Also folgt aus der Lösbarkeit der Gleichung (IIb)

$$2^{u(n,2)}\, T(n, 4, 3) < 4\, T(n, 4, 1),$$

d. h.

$$u(n, 2) \log 2 + \sum_{\substack{q \equiv 3 \pmod 4 \\ q \text{ Primzahl},\ q^r \leqq n}} \left[\frac{n}{q^r}\right] \log q < \log 4 + \sum_{\substack{q \equiv 1 \pmod 4 \\ q \text{ Primzahl},\ q^r \leqq n}} \left[\frac{n}{q^r}\right] \log q.$$

Hieraus folgt wegen

$$u(n, 2) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2^r}\right] = \sum_{r \leqq \frac{\log n}{\log 2}} \left[\frac{n}{2^r}\right] \geqq \sum_{r \leqq \frac{\log n}{\log 2}} \frac{n}{2^r} - \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] =$$

$$= n - \frac{n}{2^{\left[\frac{\log n}{\log 2}\right]}} - \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] \geqq n - 1 - \frac{\log n}{\log 2}$$

die Ungleichung

$$n \log 2 - \log 8n < \sum_{\substack{q \equiv 1 \pmod 4 \\ q \text{ Primzahl} \\ q^r \leqq n}} \frac{n}{q^r} \log q - \sum_{\substack{q \equiv 3 \pmod 4 \\ q \text{ Primzahl} \\ q^r \leqq n}} \left(\frac{n}{q^r} - 1\right) \log q =$$

$$= n \sum_{\substack{q^r \leqq n \\ q \text{ Primzahl}}} \frac{\chi(q^r) \log q}{q^r} + \sum_{\substack{q \equiv 3 \pmod 4 \\ q \text{ Primzahl} \\ q^r \leqq n}} \log q.$$

Zufolge des Hilfssatzes aus § 4 ist hier die erste Summe für hinreichend grosses n negativ; die zweite Summe ist laut der Hadamardschen Form des Primzahlsatzes[19]) asymptotisch gleich $\frac{n}{2}$, woraus ein Widerspruch folgt. Wir haben somit folgenden Satz bewiesen:

---

[19]) Setzt man, wie üblich,

$$\vartheta(n) = \sum_{\substack{q \equiv 3 \pmod 4 \\ q \text{ Primzahl} \\ q \leqq n}} \log q,$$

dann besagt jene Form des Primzahlsatzes

$$\vartheta(n) \sim \frac{n}{2},$$

also auch

$$\vartheta(n) + \vartheta(\sqrt{n}) + \vartheta(\sqrt[3]{n}) + \ldots \sim \frac{n}{2}.$$

Satz 3. *Für hinreichend großes n läßt sich $n!$ nicht als Differenz der vierten Potenzen zweier teilerfremden ganzen Zahlen darstellen.*

§ 6. Die Gleichung $n! \pm m! = x^p$.

Nehmen wir an, daß

$$n! \pm m! = x^p \qquad (n > m > 1,\ p > 1), \tag{III}$$

dann ist $n \leqq 2m$. In der Tat gibt es infolge des Bertrandschen Postulates im Intervalle $\left(\left\{\frac{m}{2}\right\}, m\right)$ stets eine Primzahl q; q ist in $m!$ offenbar in der ersten Potenz enthalten. Wäre $n > 2m \geqq 2q$, so würde $n!$ durch q^2 teilbar sein; dann wäre aber $n! \pm m!$ durch q, nicht aber durch q^2 teilbar, also könnte (III) nicht bestehen.

Wenn also (III) unendlich viele Lösungen hätte, könnten wir Lösungen mit beliebig großem m finden. Für ein genügend großes m folgt aber aus der schärferen Form des Primzahlsatzes, daß es stets eine Primzahl q mit $\frac{m}{2} < q \leqq \frac{m}{2} + \frac{m}{12 \log m}$ gibt[20]). Also ergibt sich wie oben

$$n \leqq m + \frac{m}{6 \log m}. \tag{16}$$

Aus (III) folgt nun

$$m!\left(\frac{n!}{m!} \pm 1\right) = x^p. \tag{17}$$

$m!$ enthält jede Primzahl q mit $\frac{m}{2} < q \leqq m$ genau in der ersten Potenz. Wenn also (17) besteht, enthält $\frac{n!}{m!} \pm 1$ alle

---

[20]) Setzt man nämlich, wie üblich,

$$\vartheta(n) = \sum_{\substack{q \text{ Primzahl} \\ q \leqq n}} \log q,$$

so gilt bekanntlich

$$\vartheta(n) = n + O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right),$$

also

$$\vartheta\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{12 \log m}\right) - \vartheta\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m}{12 \log m} + O\left(\frac{m}{\log^2 m}\right) > 0$$

für hinreichend großes m.

diese Primfaktoren. Aus dem Primzahlsatze[21]) folgt, daß für hinreichend großes m das Produkt dieser Primzahlen größer als $2^{\frac{m}{2}}+1$ ist, folglich gilt

$$\frac{n!}{m!} > 2^{\frac{m}{2}}. \tag{18}$$

Aus $n \leqq m + \frac{m}{6\log m} < 2m$ folgt aber

$$\frac{n!}{m!} = n(n-1)\ldots(m+1) < n^{n-m} < (2m)^{\frac{m}{6\log m}} = 2^{\frac{m}{6\log m}} e^{\frac{m}{6}},$$

was für hinreichend großes m offenbar mit (18) in Widerspruch steht. Es gilt daher

Satz 4. *Die unbestimmte Gleichung*

$$n! \pm m! = x^p$$

mit $n > m > 1$, $p > 1$ *ist in großen Zahlen unmöglich, d. h. sie kann höchstens eine endliche Anzahl von Lösungen besitzen.*

Die uns bekannten Lösungen der diophantischen Gleichung (III) sind

$$2!+2! = 2^2;\ 3!+2! = 2^3;\ 5!+4! = 12^2,\ 3!-2! = 2^2.$$

Wahrscheinlich sind diese Lösungen die einzigen.

Nach Abschluß der vorliegenden Arbeit ist es einem von uns (P. ERDŐS) gelungen, den Satz 4 auch elementar arithmetisch zu beweisen. Der Beweis ist aber nicht einfach und ist länger als der soeben gegebene.

Wir erfüllen eine angenehme Pflicht, indem wir Herrn L. KALMÁR für seine Ratschläge bestens danken.

(Eingegangen am 1. Februar 1937.)

---

[21]) Bekanntlich kann der Primzahlsatz auch in der Form ausgesprochen werden, daß das Produkt der Primzahlen zwischen $\frac{m}{2}$ und m gleich $e^{\frac{m}{2}+o(m)}$ ist.

Bibliographie.

The late Raymond E. A. C. Paley and Norbert Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain (American Math. Society Colloquium Publications, Volume XIX), VIII + 184 pages, New York, American Mathematical Society, 1934.

One of the most characteristic features of this book is that there are discussed in it the most varied topics of analysis with the powerful aid of the Fourier—Mellin transforms. As an exhaustive exposition of all results contained in this remarkable and original work is impossible for lack of space, the reviewer has to content himself with an enumeration of the main problems dealt with.

Chapter I gives a new proof of Carleman's theorem on quasi-analytic classes based upon a theorem on the Fourier transforms of functions belonging to the class $L_2(-\infty, \infty)$ and vanishing on a half-axis. Chapter II proves Szász's conditions relating to the closure in $L_2(0, 1)$ of sets $\{x^{\lambda_n}\}$ with complex λ_n and the Müntz—Szász conditions for the possibility of uniform approximation of continuous functions with such powers.

The next two chapters are devoted to Watson transforms and to some integral equations, principally to the homogeneous integral equation on $(0, \infty)$ with kernels of the type $K(x-y)$, vanishing exponentially for large values $|x|$.

The following chapters give some fine theorems on the distribution of zeros for entire functions of the exponential type, with applications to the problem of characterising the sets of real numbers λ_n for which the set $\{e^{i\lambda_n x}\}$ is closed in $L_2(a, b)$. In order to establish theorems on non-harmonic Fourier series, the authors develop a theorem concerning a set $\{g_n\}$ of elements in Hilbert space which differs but slightly from a closed orthonormal set $\{f_n\}$, i. e.

$$\Big\| \sum_n a_n (f_n - g_n) \Big\| \leq \vartheta \Big(\sum_n |a_n|^2 \Big)^{1/2}, \qquad \vartheta < 1,$$

the a_n being arbitrary complex numbers for which the right-hand side sum converges. It may be pointed out that this theorem could be derived also from the following one: *Let A be a linear transformation in Hilbert space for which*

$$\|Ah\| \leq M \|h\|, \qquad M < 1$$

(h being an arbitrary element of Hilbert space), then $(E-A)^{-1}$ exists and we have

$$(1+M)^{-1} \|h\| \leq \|(E-A)^{-1} h\| \leq (1-M)^{-1} \|h\|$$

(*cf.* for instance F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913), p. 92).

We find then some much interesting theorems on non-harmonic

Fourier series, gap theorems and an extension of Wiener's generalised harmonic analysis for complex arguments.

The last two chapters deal with random functions and their harmonic analysis using the theory of integration in a space of infinite dimensions as well as with applications to ergodic problems and to the theory of Brownian motion.

The book is written very clearly and in a suggestive manner, the demonstrations are all carried out in their details. One is feeling here a complete harmony between the classical theory of analytical functions and the most modern branches of the theory of real functions.

The book is headed by a picture of the late R. E. A. C. PALEY reminding us of the great loss to mathematical sciences by his early death.

The surviving author dedicates the book to Professors HARDY and LITTLEWOOD, teachers of both authors.

Béla de Sz. Nagy.

Willard van Orman Quine, A System of Logistic, with a foreword by A. N. WHITEHEAD, XI + 204 pages, Cambridge Massachusetts, Harvard University Press, 1934.

The system of symbolic logic developed in the present book is closely related to that of Whitehead's and Russell's *Principia Mathematica* (*PM*). However, Quine's system is a somewhat more general one. Indeed, in *PM*, classes and dyadic relations had to be treated separately; the corresponding theorems on triadic and tetradic relations and so on, could be proved by similar methods. However, it is impossible to demonstrate or even to express, in the system of *PM*, any theorem dealing with relations in general, i. e. with n-adic relations without specifying n. This inconvenience is avoided in Quine's system by regarding the dyad (i. e. ordered couple) x, y of terms of whatever type x and y as a term of a new type again. By iteration we obtain triads, tetrads and so on; for instance, the triad x, y, z is identified with the dyad $x, (y, z)$ formed of the term x and the dyad y, z. In this way, triads become a special kind of dyads, tetrads that of triads and so on, as dyads itselves are to be regarded a special kind of terms. An an n-adic relation can be considered as a class of n-ads, the theory of relations in general becomes not only possible, but even a special case of the theory of classes.

In Quine's system, the standard form of a proposition is "x is a member of the class α"; the proposition itself is identified with the dyad α, x formed of the "predicate" α and the "subject" x. Propositions are, therefore, terms of special types, viz. of the type of a dyad whose first element has the type of a class capable to contain or not an element of the same type as the second element of the dyad. Propositional functions are not used but are replaced by their extensions; therefore, the so-called non-ramified type theory can serve as basis. The type-range of a variable, or rather the relative restrictions on the type-ranges of the variables occurring in an expression required to render it significant, is provided by the context rather than by the shape of the variables. However, for the sake of convenience, special propositional and class variables are used.

Besides the binary operation of "ordination", symbolized by the comma, there are needed but two primitive ideas, the unary operation of "congeneration" and the variable-binding operation of "abstraction". The first one has to operate on a class α and produces the class $[\alpha]$ of all those classes in which α is included. The second one operates on a propositional expression "- - -" containing some or no free occurrence of a variable "x" and generates the class $\hat{x}$ (- - -) of all terms x such that - - - holds. Particularly, if "x" does not occur in "- - -", $\hat{x}$ (- - -) denotes the universal class or the null class according as - - - expresses a true or a false proposition. Thus, in this case, $\hat{x}$ (- - -) can be identified with the truth-value of the proposition - - -; this device is used to define the operations of the propositional calculus in terms of the congeneration and abstraction. For instance, material implication $p \supset q$ ("p implies q") is defined as $[\hat{x}p], \hat{y}q$. The abstraction is the only way of binding a variable; for instance the universal quantifier, "for every term x, - - - holds", is expressed as $U, \hat{x}$ (- - -), where U, the class whose only element is the universal class, is of course defined equally by means of abstraction and congeneration.

As informal rules of inference are adopted, besides the familiar rule of substitution and that of the inference of the consequent ("*modus ponens*"), two rules called of subsumption and of concretion, the former of which enables us to bind a free variable, occurring in a theorem or postulate, by means of the universal quantifier; the latter provides the equivalence of the proposition $\hat{x}$ (- - -), y to the result of substituting "y" for "x" in "- - -".

The system is based upon six formal postulates. Some of them have a rather forbidding aspect; but one could hardly avoid a complicated form of postulates in a system with a so restriced number of primitive ideas among which the operations of propositional calculus do not occur. However, in order to make the reader familiar with the postulates, the author discusses in detail their intuitive meaning and validity.

On the basis of the postulates the propositional calculus, the theory of identity, of universality and existence, the fundamental notions of class and relation calculus etc. are developed, shortly all theories which precede the cardinal arithmetic in *P M*. Finally, the adequacy of the system to that of *PM* is proved. For abbreviation of formal proofs a scheme due to ŁUKASIEWICZ is adopted and fitted to the system. For each formally derived theorem, not merely lemma for subsequent theorems, the intuitive meaning is carefully explained. This appears also at a glance on the text; indeed, the ratio of English text to formulas is much greater than that in *PM*. The fact that the author could develop, in spite of this better ratio, within two hundred pages a theory equivalent to that on the first four hundred pages of *PM*, makes evident the advantages of his system.

L. Kalmár.

Max Deuring, Algebren (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, vierter Band, Heft 1), V + 143 S., Berlin, J. Springer, 1935.

Die neue Entwicklung der Theorie der Algebren (nichtkommutativen Ringen über einem Körper mit einer kommutativen „skaleren" Multiplikation für die Elemente des Körpers und des Ringes) hat das Erscheinen dieses Berichtes notwendig gemacht. Nach den Grundlagen in I setzt Verfasser in II die Struktursätze, in der allgemeinsten bisher bekannten Fassung, in helles Licht. Das wichtigste methodische Hilfsmittel ist weiterhin der Begriff der Darstellung in Noetherscher Begründung. In III folgt ein Überblick über die Theorie der Darstellungen und Darstellungsmoduln sowie Darstellungen der Algebren, in IV die Theorie der einfachen Algebren (nichtkommutative Galoissche Theorie, Theorie der Zerfällungskörper) und in V die Theorie der Brauer—Noetherschen Faktorensysteme. Die zweite Hälfte des Buches behandelt die Arithmetik der Algebren. Nach der Theorie der ganzen Größen in VI (Idealtheorie der Algebren, die Idealklassentheorie und p-adische Erweiterungen von Algebren), die eine starke Vereinfachung gegenüber der bisherigen Begründung bedeutet, entwickelt Verfasser in VII die tiefere Theorie der Algebren über einen Zahlkörper. HASSE hat die Zusammenhänge zwischen den Struktureigenschaften der Algebren und der Arithmetik der Zahlkörper, insbesondere der Klassenkörpertheorie und des Reziprozitätsgesetzes erkannt. Dementsprechend gibt Verfasser in VII einige Anwendungen der Algebrentheorie, deren wichtigste der Hassesche Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes und die Noethersche Verallgemeinerung des Hauptgeschlechtsatzes sind.

Verfasser gibt eine vollständige Darstellung der Theorie der Algebren, mit Hinweisen auf die bezügliche Literatur, so daß dieser Bericht zugleich ein vollständiges Lehrbuch ist, das demjenigen, der in diese elegante Theorie eindringen will, unentbehrlich ist.

L. Zányi.

Antoni Zygmund, Trigonometrical Series (Monografje Matematyczne, Tom V), IV + 331 pages, Warszawa—Lwów, 1935.

This volume of the *Monografje Matematyczne* contains the standard results of the theory of trigonometrical series as well as the newest ones. As a matter of fact, it is chiefly dealing with Fourier series. The author treats exhaustively his topic so vastly enriched by recent investigations, not yet inserted in the textbooks.

The abundance and the diversity of its subject-matter makes impossible even the bare enumeration of its problems and so we are restricted only to mention the most important ones.

Chapter I and II present beside the fundamental facts concerning the Fourier series and its coefficients the different convergence criteria together with their connections. Chapter III is dealing with the problems of summability of the Fourier series (theorems of FEJÉR and of M. RIESZ about the summability (C, r); Abel summability). The generalisation of the summability theorem of FEJÉR is the subject also of one part of Chapter X. concerned with the convergence of the sequence

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu(x)-f(x)|^k$$

(CARLEMAN, HARDY, LITTLEWOOD, ZYGMUND); we find in this chapter the most recent investigations of HARDY and LITTLEWOOD about the Cesàro and Abel summation of the Fourier series.

Chapter IV deals with the theorem of RIESZ—FISCHER and with the problem of strong convergence; it presents here the necessary and sufficient conditions for belonging to the different classes of functions as far as they are to be expressed by Fourier series (theorems of YOUNG, ZYGMUND and STEINHAUS). Chapter IX is attached to the same circle of thougt; it presents the theorem of HAUSDORFF—YOUNG, its generalisation by F. RIESZ and the respective theorems of PALEY and HARDY—LITTLEWOOD as well as two theorems concerning lacunary series, special cases of certain theorems of BANACH dealing with orthogonal series. It may be observed that the second of these theorems, for the trigonometrical case, was found by SIDON independently and before Banach's paper; indeed, Sidon's one dealing with the subject, though not printed before 1932, was accepted for publication in 1928. Also Chapter VII is occupied with the strong convergence of the Fourier series and of the conjugate series (theorems of M. RIESZ, FEJÉR and ZYGMUND); here we find the investigations of HARDY, LITTLEWOOD, F. and M. RIESZ about conjugate series.

Chapter V is concerned about the series with special coefficients whereas Chapter VI contains the results about the absolute convergence of trigonometrical series (LUSIN, DENJOY, FATOU, S. BERNSTEIN, O. SZÁSZ, ZYGMUND, SIDON and N. WIENER).

Chapter XIII is dealing with the divergence-phenomena (DU BOIS REYMOND, FEJÉR, KOLMOGOROFF); besides we find here the theorems of ROGOSINSKI and CRAMÉR together with an account of the phenomenon of GIBBS.

The two last chapters develop Riemann's theory of trigonometrical series together with a concise discussion of Fourier's integrals.

Finally, it is to be mentioned that at the end of every chapter, excellent and very judiciously chosen problems lead the reader into the most delicate details of the theory. In spite of the conciseness, the argumentation is always clear. In summary, Professor Zygmund's book is a rich, useful and most delightful work.

G. Grünwald.

60

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK, Budapest

Mostly reprinted (available in October, 1968). Vols. 1—50, 1892—1943, all published, with General Index

clothbound US $ 850.—, paperbound, resp. in original issues US $ 750.—

Prepublication price, valid until June 30, 1968:
clothbound US $ 800.—, paperbound, resp. in original issues US $ 700.—

Published by the L. Eötvös Mathematical and Physical Association in Hungarian, since 1920 contains also ample summaries in German language.
Mathematical editors: G. Rados (1892—1913), L. Fejér (1914—1932), D. König (1933—1943).

MATEMATIKAI LAPOK, Budapest

Partly reprinted. Vols. 1—18, 1949/50—1967

clothbound US $ 196.—, paperbound, resp. in original issues US $ 160.—

Mathematical quarterly, published by the Bolyai Mathematical Society in Hungarian, with summaries in congress languages.

SOVIET MATHEMATICAL REPRINTS

TRUDY SEMINARA PO VEKTORNOMU I TENZORNOMU ANALIZU

Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis. Mémoires du Séminaire pour l'Analyse vectorielle et tensorielle. Moscow-Leningrad, 1933—1966

clothbound US $ 240.—

Vols. 1—4 are published chiefly in Western languages. Vol. 4. contains the proceedings of the 1st International Conference for Tensor Differential Geometry, held in Moscow, 1934. Editors: Professor V. F. Kagan and P. K. Razhevskij

Single volumes of all above periodicals are available. Subscriptions to forthcoming volumes may be also entered.